Sipanje v 1D I

1. Izraèunaj prepustnost za sipanje delca na potencialu V(x) = – Vδ(x).
2. Obravnavaj pole amplitude za prepustnost.
3. Izpelji Lipmann-Schwingerjevo enaèbo.

1. Kot ponavadi bomo raèunali z ravnimi valovi Ψ(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.
Obmoèje bomo razdelili na dva dela, in sicer na obmoèje levo od delta funkcije(x<0) in desno od delta funkcije(x>0).

x<0	x>0
Ae^{ikx}	Ce^{ikx}
Be^{-ikx}	

Prepustnost je definirana takole: $T = \left|\frac{C}{A}\right|^2$

Vemo da mora biti Ψ zvezna funkcija, zato velja

$$A + B = C$$

Upoštevamo še pogoj za njene odvode in sicer, da je

$$\Psi'(0^+) - \Psi'(0^-) = -\frac{2m\mathbf{l}}{\hbar^2}\Psi(0)$$

ter dobimo izraz

$$ikC - ikA + ikB = -\frac{2m\mathbf{l}}{\hbar^2}C$$

definiramo še $k_0 = \frac{m\mathbf{l}}{\hbar^2}$ in izraèunamo, da je $\frac{C}{A} = \frac{ik}{ik + k_0}$.

In konèno še prepustnost:

$$T = \frac{CC^+}{AA^+} = \frac{k^2}{k^2 + k_0^2} = \frac{1}{1 - \frac{E_0}{E}}, \text{ kjer je } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \text{ in } E_0 = -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$$

2. $C = A\frac{ik}{ik + k_0}$ C ima pol, ko je ik = $-k_0$ $\Rightarrow$ k = ik_0. To pa nam predstavlja ravno vezano stanje, saj gre v polu prepustnost proti neskonènosti, to pa pomeni da v sistem ne vpada valovanje, kar predstavlja vezano stanje. Se pravi so poli amplitude za prepustnost toèno tam, kjer se nahajajo vezana stanja.

3. Zapišimo stacionarno Schrödingerjevo enaèbo:

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + V(x)\Psi$$

Hamiltonov operator je $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$. Velja, da je

$$H\Psi = E\Psi$$

Definirajmo še $H_0 = H - V(x)$

$$H_0\Psi = E\Psi \qquad \Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Sedaj vpeljimo še Greenovo funkcijo G(x,x') za katero velja

$$(E - H_0)G(x,x') = \delta(x-x').$$

Napišimo Schrödingerjevo enaèbo

$$(E - H_0)\Psi(x) = V(x)\Psi(x) = \int V(x')\Psi(x')d(x-x')dx'$$

v ta izraz namesto delta funkcije vstavimo Greenovo funkcijo,

$$(E - H_0)\Psi(x) = \int V(x')\Psi(x')(E - H_0)G(x,x')dx'$$

nesemo oklepaj $(E - H_0)$ pred integral, ker je odvisen samo od x

$$(E - H_0)\Psi(x) = (E - H_0)\int V(x')\Psi(x')G(x,x')dx'$$

postavimo vse na levo stran enaèaja izpostavimo $(E - H_0)$ in dobimo

$$(E - H_0)[\Psi(x) - \int V(x')\Psi(x')G(x,x')dx'] = 0$$

ker vemo da velja $H_0\Psi = E\Psi$ in $\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ dobimo

$$\Psi(x) - \int V(x')\Psi(x')G(x,x')dx' = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

kar ni niè drugega kot Lipmann-Schwingerjeva enaèba.

Izraèunajmo še kaj je Greenova funkcija G(x,x'). Kot vemo velja

$$(E - H_0)G(x,x') = \delta(x-x')$$

èe $x \neq x'$ potem G(x,x') ustreza ravnemu valu. Obmoèje razdelimo na $x<x'$ in $x>x'$.

$$G_1(x,x') = Ae^{ik(x-x')} + Be^{-ik(x-x')} \quad x<x'$$
$$G_2(x,x') = Ce^{ik(x-x')} + De^{-ik(x-x')} \quad x>x'$$

Ker hoèemo imeti samo izhajajoèe valovanje sta A in D enaka niè. Zaradi zveznosti v x = x' je B = C. Izpeljimo še drugi robni pogoj.

$$\int_{x'-e}^{x'+e} (E - H_0)G(x,x')dx = \int_{x'-e}^{x'+e} d(x-x')dx = 1$$

kjer je ε majhen. Ko integriramo konstanto E dobimo 0, H_0 pa je operator kinetiène energije.

$$1 = 0 + \int_{x'-e}^{x'+e} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 G(x,x')}{\partial x^2} dx \Rightarrow \quad 1 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial G(x,x')}{\partial x} \Bigg|_{x'-e}^{x'+e}$$

$$1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left[ikCe^{ike} - (-ik)Be^{ike}\right]$$ ε pošljemo proti niè in dobimo B = C = $\frac{m}{ik\hbar^2}$.

Tako konèno dobimo Greenovo funkcijo

$$G(x,x') = \frac{m}{ik\hbar^2} e^{ik|x-x'|}$$