1 Naloga

Zapišimo operator časovnega razvoja valovne funkcije dveh delcev s spinom 1/2, ki sta sklopljena s Heisenbergovo interakcijo $H = J\vec{S_1}\vec{S_2}$ v bazi lastnih funkcij projekcij obeh spinov na os z.

Obravnavajmo teleportacijo delca s spinom 1/2 s pomočjo EPR para.

2 Časovni razvoj

Za razvoj potrebujemo bazo lastnih funkcij. Če imamo dva delca s polovičnim spinom imamo 4 možne variante lastnih funkcij:

$$|\uparrow\uparrow>$$

$$|\uparrow\downarrow>$$

$$|\downarrow\uparrow>$$

$$|\downarrow\downarrow>$$

Le te pa niso lastne funkcije hamiltonjana. Sestavimo zato lastne funkcije celotnega spina S. Za celoten spin velja:

$$\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2}$$

$$\vec{S}^2 = \vec{S_1}^2 + \vec{S_2}^2 + 2\vec{S_1}\vec{S_2}$$

In dobimo

$$H = \frac{1}{2}J(S^2 - {S_1}^2 - {S_2}^2)$$

.

Za $S = 1$ imamo na voljo $m_s = 0, 1, -1$ in za $S = 0 le m_s = 0$
Zapišimo novo bazo lastnih funkcij celotnega spina.

$$|11 >= |\uparrow\uparrow>$$

$$|10 >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> +|\downarrow\uparrow>$$

$$|1 - 1 > | =\downarrow\downarrow>$$

$$|00 >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> -\frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow>$$

To lahko vidimo ali pa prepišemo iz Clebsch-Gordanovih tabel.
Izračunajmo energije lastnih stanj:

$$H|11 >= H|\uparrow\uparrow>= \frac{J\bar{h}^2}{2}(2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1))|\uparrow\uparrow>= \frac{J\bar{h}^2}{4}$$

$$H|10>=\frac{J\bar{h}^2}{4}(2-(\frac{3}{4}+\frac{3}{4})=\frac{J\bar{h}^2}{4}$$

$$H|1-1>=\frac{J\bar{h}^2}{4}$$

$$H|00>=-\frac{3J\bar{h}^2}{4}$$

Poglejmo primer če imamo ob $t=0$ stanje $|\uparrow\downarrow>$ in naredimo časovni razvoj.

$$|\uparrow\downarrow>=a|11>+b|10+c|1-1>+d|00>$$

Da odgovarja našemu začetnemu stanju mora veljati$a=c=0$ in $d=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$, torej le še pomnožimo z časovnim delom:

$$|\psi,t>=\frac{1}{\sqrt{2}}|10>exp(-\frac{iJ\bar{h}}{4}t)+|00>exp(\frac{i3J\bar{h}}{4}t)$$

V naši stari bazi:

$$|\Psi,t>=\frac{1}{2}|\uparrow\downarrow>exp(-\frac{iJ\bar{h}}{4}t)+\frac{1}{2}|\downarrow\uparrow>exp(-\frac{iJ\bar{h}}{4}t)+$$

$$\frac{1}{2}|\uparrow\downarrow>exp(\frac{i3J\bar{h}}{4}t)-\frac{1}{2}|\downarrow\uparrow>exp(\frac{i3J\bar{h}}{4}t)$$

3 EPR

Če vzamemo časovni razvoj, Heisenbergovo interakcijo in rotacijo spinorjev lahko sestavimo poljubno unitarno matriko. Poglejmo si delovanje takega operatorja- CNOT .

$$CNOT=R_{2y}(-\frac{\pi}{2})R_{2z}(-\frac{\pi}{2})R_{1z}(-\frac{\pi}{2})Q(\frac{\pi}{2})R_{1z}(\pi)Q(\frac{\pi}{2})R_{2y}(\frac{\pi}{2})$$

kjer R_{2y} deluje na drugi spin in vrti okoli y, ter Q matrika za časovni razvoj sklopitve (Heisenbergova interakcije)

$$Q(\Phi)=e^{i\frac{\Phi}{4}}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Phi}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\frac{\Phi}{2}) & -isin(\frac{\Phi}{2}) & 0 \\ 0 & -isin(\frac{\Phi}{2}) & cos(\frac{\Phi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & & e^{-i\frac{\Phi}{2}} \end{pmatrix} R_{\vec{n}}(\Phi)=cos\frac{\Phi}{2}-i\vec{\sigma}\vec{n}sin\frac{\Phi}{2}$$

v bazi

$$\vec{u}=(|\uparrow\uparrow>,|\uparrow\downarrow>,|\downarrow\uparrow>,|\downarrow\downarrow>),\Phi=\frac{Jt}{\bar{h}}$$

Poglejmo če naša matrika res odgovarja časovnemu razvoju. Vzemimo časovni razvoj funkcije ki smo ga ravno izračunali. Torej stanja $|\uparrow\downarrow>$

$$|\Psi,t>=e^{i\frac{\Phi}{4}}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Phi}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\frac{\Phi}{2}) & -isin(\frac{\Phi}{2}) & 0 \\ 0 & -isin(\frac{\Phi}{2}) & cos(\frac{\Phi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & & e^{-i\frac{\Phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\uparrow\uparrow> \\ |\uparrow\downarrow> \\ |\downarrow\uparrow> \\ |\downarrow\downarrow> \end{pmatrix}=$$

$$=e^{i\frac{\Phi}{4}}(|\uparrow\downarrow> cos\frac{\Phi}{2}+|\downarrow\uparrow>(-isin\frac{\Phi}{2}))=e^{i\frac{\Phi}{4}}(|\uparrow\downarrow>\frac{1}{2}(e^{i\frac{\Phi}{2}}+e^{-i\frac{\Phi}{2}})+|\downarrow\uparrow>\frac{1}{2}(e^{-i\frac{\Phi}{2}}-e^{i\frac{\Phi}{2}})=$$

$$\frac{1}{2}|\uparrow\downarrow> e^{-\frac{\Phi}{4}t}+\frac{1}{2}|\downarrow\uparrow> e^{-\frac{\Phi}{4}t}+\frac{1}{2}|\uparrow\downarrow> e^{\frac{i3\Phi}{4}t}-\frac{1}{2}|\downarrow\uparrow> e^{\frac{i3\Phi}{4}t}$$

in če vstavimo Φ dobimo enak rezultat

$$|\Psi,t>=\frac{1}{2}|\uparrow\downarrow> exp(-\frac{iJ\bar{h}^2}{4}t)+\frac{1}{2}|\downarrow\uparrow> exp(-\frac{iJ\bar{h}^2}{4}t)+$$

$$\frac{1}{2}|\uparrow\downarrow> exp(\frac{i3J\bar{h}^2}{4}t)-\frac{1}{2}|\downarrow\uparrow> exp(\frac{i3J\bar{h}^2}{4}t)$$

Poglejmo še operator CNOT.

$$R_{\vec{n}}=e^{-\frac{\phi}{2}\vec{n}\vec{\sigma}}$$

$$\sigma_y=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & \end{pmatrix}\sigma_z=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$CNOT|\Psi>=e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{2y}}e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{2z}}e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{1z}}Q_{ij}(\frac{\pi}{2})e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_{1z}}Q_{ij}(\frac{\pi}{2})e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_{2y}}$$

Poglejmo za $R_{2y}(\phi)=cos\frac{\phi}{2}I-isin\frac{\phi}{2}\sigma_y$, ki vrti torej le 2. spin, prvi ostanejo isti zato je matrika:

$$R_{2y}(\phi)=\begin{array}{c} \\ |\uparrow\uparrow> \\ |\uparrow\downarrow> \\ |\downarrow\uparrow> \\ |\downarrow\downarrow> \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} |\uparrow\uparrow> & |\uparrow\downarrow> & |\downarrow\uparrow> & |\downarrow\downarrow> \end{array} \\ \begin{pmatrix} cos\frac{\phi}{2} & -sin\frac{\phi}{2} & 0 & 0 \\ sin\frac{\phi}{2} & cos\frac{\phi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\frac{\phi}{2} & -sin\frac{\phi}{2} \\ 0 & 0 & sin\frac{\phi}{2} & cos\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}\end{array}$$

Ko zmnožimo vse matrike R in Q dobimo CNOT v matrični obliki napisan spodaj. H pa je Hadamardov operator.

$$CNOT=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CNOT|\uparrow\uparrow>=|\uparrow\uparrow>$$
$$CNOT|\uparrow\downarrow>=|\uparrow\downarrow>$$
$$CNOT|\downarrow\uparrow>=|\downarrow\downarrow>$$
$$CNOT|\downarrow\downarrow>=|\downarrow\uparrow>$$

Po domače je kot pri digitalni elektroniki. Če je prvi spin $\uparrow$ oz 'da' pusti drug spin nespremenjen, drugače ga obrne.
Na začetku imamo stanje $|\uparrow\uparrow>$ in nanj delujemo z H_1 in $CNOT$.

$$H_1|\uparrow>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow>-|\downarrow>)$$

$$CNOTH_1|\uparrow\uparrow>=CNOT(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow>-\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow>)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow>-\frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow>)$$

$$|\chi>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow>-\frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow>$$

To je EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) paradoks. Dva delca z nekim spinom pošljemo narazen. Ko izmerimo prvega se drugi obrne v isto smer. Imamo torej polovične možnosti da bo prvi spin $\uparrow$, kjer bo drugi hkrati $\uparrow$.
To nam pokaže nelokalnost kvantne mehanike.
Poglejmo zdaj to uporabo v kvantni mehaniki. Recimo da A vzame prvi spin B pa drugega. Takoj ko A izmeri spin uniči eno komponento in B dobi uničeno.

Imamo še neko tretje stanje $|\phi>=\alpha|\uparrow>+\beta|\downarrow>$ in valovna funkcija je:

$$|\psi>=|\phi>|\chi>=\alpha|\uparrow>|\chi>+\beta|\downarrow|\chi>>$$
$$|\psi>\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|\uparrow\uparrow\uparrow>-\alpha|\uparrow\downarrow\downarrow>+\beta|\downarrow\uparrow\uparrow>-\beta|\downarrow\downarrow\downarrow>)$$

A naredi na funkciji operacijo

$$CNOT_{12}|\psi>=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|\uparrow\uparrow\uparrow>-\alpha|\uparrow\uparrow\downarrow>+\beta|\downarrow\downarrow\uparrow>-\beta|\downarrow\uparrow\downarrow>)$$

$$H_1CNOT_{12}|\psi>=\frac{1}{2}(\alpha|\uparrow\uparrow\uparrow>-\alpha|\downarrow\uparrow\uparrow>-\alpha|\uparrow\downarrow\downarrow>+\alpha|\downarrow\downarrow\downarrow>+$$
$$+\beta|\downarrow\downarrow\uparrow>+\beta|\uparrow\downarrow\uparrow>)-\beta|\downarrow\uparrow\downarrow>)-\beta|\uparrow\uparrow\downarrow>)$$

Če A sedaj izmeri oba svojo spina se valovna funkcija uniči. Nimamo več 8 linearnih kombinacij valovnih funkcij, ampak le še po dve za vsako stanje. A lahko izmeri 4 variante. Poglejmo! Če izmeri $|\uparrow\uparrow>$dobimo

$$\rightarrow \alpha|\uparrow\uparrow\uparrow> -\beta|\uparrow\uparrow\downarrow>=|\uparrow\uparrow>(\alpha|\uparrow> -\beta|\downarrow>)$$

in ostale

$$|\uparrow\downarrow>\rightarrow|\uparrow\downarrow>(-\alpha|\downarrow> +\beta|\uparrow>)$$

$$|\downarrow\uparrow>\rightarrow|\downarrow\uparrow>(-\alpha|\uparrow> -\beta|\downarrow>)$$

$$|\downarrow\downarrow>\rightarrow|\downarrow\downarrow>(\alpha|\downarrow> +\beta|\uparrow>)$$

Sedaj ko A izmeri projekcije potrebujemo za B ustrezno unitarno transformacijo U.
če A izmeri

$$|\uparrow\uparrow>\rightarrow H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$|\uparrow\downarrow>\rightarrow H=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$|\downarrow\uparrow>\rightarrow H=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$|\downarrow\downarrow>\rightarrow H=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$