# Spin I

Gal Matijevič

Maj 2004

## 1 Uvod

• Pokaži, da je vsaka valovna funkcija delca s spinom 1/2 lastna funkcija operatorja neke projekcije spina.

• V bazi lastnih funkcij operatorja $S_z$ zapiši operator časovnega razvoja valovne funkcije delca s spinom 1/2 v homogenem magnetnem polju.

## 2 Lastne vrednosti

Bazo za delec s spinom 1/2 sestavljata funkciji

$$|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\rangle, \qquad |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = |\downarrow\rangle,$$

torej lahko vsako funkcijo $|\psi\rangle$ predstavimo kot linearno kombinacijo zgornjih dveh

$$|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle.$$

Isto reč lahko ponazorimo tudi s tako imenovanim *spinorjem*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Operator spina je določen takole

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma,$$

kjer smo s $\sigma$ označili vektor matrik

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Koeficienta $\alpha$ in $\beta$ izberimo tako, da bo imela valovna funkcija obliko

$$|\psi\rangle = \cos\theta|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|\downarrow\rangle.$$

Takšna izbira zadošča normalizaciji, saj je vsota kvadratov absolutnih vrednosti koeficientov enaka 1. Definirajmo še smer magnetnega polja

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Ker iščemo lastne vrednosti projekcije spina na izbrano smer (smer magnetnega polja), zapišimo

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}|\psi\rangle &= \frac{\hbar}{2}|\psi\rangle \\ \sigma\cdot\mathbf{n}|\psi\rangle &= |\psi\rangle \end{aligned}$$

Skalarno pomnožimo prej definirana vektorja

$$\sin\vartheta\cos\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix} +$$
$$\sin\vartheta\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix} +$$
$$\cos\vartheta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Če vse skupaj seštejemo, dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\cos\varphi - i\sin\vartheta\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi + i\sin\vartheta\varphi & -\cos\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta e^{-i\varphi} \\ \sin\vartheta e^{i\varphi} & -\cos\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix}$$

Obe enačbi nam data enako rešitev

$$\tan\theta = \tan\frac{\vartheta}{2}e^{i(\varphi-\phi)},$$

torej morata kota $\theta$,$\phi$ zadoščati pogojema

$$\theta = \frac{\vartheta}{2}, \qquad \phi = \varphi.$$

# 3 Operator časovnega razvoja

Ob času $t = 0$ je valovna funkcija v stanju $|\uparrow\rangle$. Smer magnetnega polja je podana s $\mathbf{B} = B\mathbf{n}$. Hamiltonov operator zapišemo takole

$$H = -\mu \cdot \mathbf{B}.$$

Če v to enačbo vstavimo

$$\mu = g\frac{\mu_B}{\hbar}\mathbf{S},$$

lahko $H$ zapišemo kot

$$H = -\frac{g\mu_B B}{2}(\sigma \cdot \mathbf{n}),$$

ki določa operator časovnega razvoja.

Namesto, da s tem operatorjem delujemo neposredno na funkcijo $|\psi\rangle$, to raje stroimo na lastnih funkcijah $|n\rangle$

$$e^{i\frac{H}{\hbar}t} = \sum_n c_n e^{i\frac{H}{\hbar}t}|n\rangle = \sum_n c_n e^{i\frac{E_n}{\hbar}t}|n\rangle = |\psi, t\rangle.$$

Da bo manj pisnja, označimo

$$\frac{q\mu_0 Bt}{2\hbar} = -\frac{\varphi}{2}.$$

Operator časovnega razvoja na začetno funkcijo potem izgleda takole

$$e^{-\frac{\varphi}{2}\sigma\cdot\mathbf{n}}|\uparrow\rangle = (\mathbf{I}\cos\frac{\varphi}{2} - i\sigma\cdot\mathbf{n}\sin\frac{\varphi}{2})|\uparrow\rangle \quad = \\ (1 - \frac{\varphi}{2}\sigma\cdot\mathbf{n} - \left(\frac{\varphi}{2}\sigma\cdot\mathbf{n}\right)^2 + i\left(\frac{\varphi}{2}\sigma\cdot\mathbf{n}\right)^3 - \cdots)|\uparrow\rangle.$$

Če izberemo smer projekcije $n = (0, 1, 0)$ in vrednost $\varphi = -\pi/2$, se operator močno poenostavi v

$$H = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

kar imenujemo Hadamardov operator. Delujmo s tem operatorjem na našo začetno funkcijo $|n\rangle$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$