KVANTNA MEHANIKA 1 - vaje

Domača naloga

Tomaž Peterman
5. maj 2004

1. Naloga:

Delec je v stanju z funkcijo $\psi(\bar{r}) = A(x + iy + z)\exp(-\lambda r)$. Kolikšna je verjetnost, da izmerimo $l_x = \hbar$? Kolikšna pa je verjetnost, da izmerimo $l_x = \hbar$, če smo tik pred tem izmerili l_z?

2. Rešitev:

Valovno funkcijo razvijemo po lastnih funkcijah operatorja l_z, nato pa z rotacijsko matriko pretvorimo te lastne funkcije v lastne funkcije operatorja l_x.

Problem je sferično simetričen, zato preidemo v krogelne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ x &= r\sin\vartheta\sin\varphi \ . \\ x &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

In z njimi zapišemo valovno funkcijo:

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = Ar(\sin\vartheta\cos\varphi + i\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta)\exp(-\lambda r).$$

Lastne funkcije vrtilne količine pa so krogelne funkcije in v našem primeru se izkaže, da potrebujemo le sledeče krogelne funkcije:

$$\begin{aligned} Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta \\ Y_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\exp(i\varphi) \quad . \\ Y_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\exp(-i\varphi) \end{aligned}$$

Sedaj zapišemo našo valovno funkcijo s pomočjo teh sfernih harmonikov:

$$\psi = Ar\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\exp(-\lambda r)\left(-\sqrt{2}Y_{1,1} + Y_{1,0}\right).$$

Pri vrtilni količini pa nas nič ne zanima radialni del, ampak le sferični del, zato lahko zapišemo valovno funkcijo kot:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2}|11\rangle + |10\rangle\right) \text{ oz.}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Faktor pred oklepajem smo postavili zaradi normalizacije. In sedaj lahko preberemo verjetnost, da je $l_z = \hbar$, ki je $\frac{2}{3}$. Nas pa zanima vrednost l_x, zato uporabimo matriko za rotacijo okoli y osi za kot ϑ, ki smo jo vpeljali pri prejšnji nalogi:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}l_y\vartheta\right) = E = \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\vartheta}{2} & \sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} & \sin^2\frac{\vartheta}{2} \\ -\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} & \cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\vartheta}{2} & \sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} \\ \sin^2\frac{\vartheta}{2} & -\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} & \cos^2\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}.$$

Prehod iz l_z v l_x pomeni rotacijo okoli y osi za $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Gornja rotacijska matrika torej preide v:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Sedaj gornjo valovno funkcijo zlahka izrazimo v novi bazi s pomočjo matrike E, kot:

$$\psi' = E\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

in preberemo verjetnost za $l_x = \hbar$, ki je 0.

Sedaj pa poglejmo, kaj se spremeni, če najprej izmerimo l_z in šele nato l_x. Verjetnost, da izmerimo $l_z = \hbar$ je enaka $\frac{2}{3}$, verjetnost, da izmerimo $l_z = 0$ je enaka $\frac{1}{3}$ in verjetnost, da izmerimo $l_z = -\hbar$ je enaka 0. Sedaj ločimo oba primera:

a) izmerili smo $l_z = \hbar$, torej $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

Sedaj s pomočjo matrike E zarotiramo ta vektor v smer l_x in pogledamo verjetnost za $l_x = \hbar$.

$$\psi' = E\psi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow P(l_x = \hbar) = \frac{1}{4}.$$

b) izmerili smo $l_z = 0$, torej $\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

in spet izračunamo verjetnost za $l_x = \hbar$.

$$\psi' = E\psi = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \rightarrow P(l_x = \hbar) = \frac{1}{2}.$$

Sedaj pa samo še seštejemo obe možne kombinacije za izmerjen $l_x = \hbar$ in dobimo:

$$P(l_x = \hbar) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Pokazali smo, da z vmesno meritvijo zares vplivamo na rezultat končne meritve, saj smo v prvem delu dobili $P(l_x = \hbar) = 0$, v drugem pa $P(l_x = \hbar) = \frac{1}{3}$.