Kazalo

Domača naloga iz predmeta kvantne mehanike

Jan Premru

20.5.2004

1 Navodilo

Zapiši operator, ki transformira valovno funkcijo v podprostoru z $l = 1$ iz baze lastnih funkcij operatorja L_z v bazo lastnih funkcij operatorja l'_z, kjer je kot med osema z in z' enak θ. Rezultat uporabi na nalogi 'Vrtilna količina I'.

2 Operator vrtenja

Operator vrtenja zapišemo v obliki

$$e^{i\vec{L}\vec{\varphi}/\hbar}$$

. Odločimo se da bomo kakor pri nalogi 'Vrtilna količina I' vrteli koordinatni sistem okrog y osi. Torej je $\vec{\varphi} = (0, \theta, 0)$ in $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ sledi

$$e^{iL_y\theta/\hbar} = \sum_n \frac{(iL_y\theta/\hbar)^n}{n!} \tag{1}$$

Operator L_y lahko predstavimo z matriko, ki deluje na vektor stanja.

$$\mathbf{L_y} = \begin{pmatrix} \langle 11|L_y|11\rangle & \langle 11|L_y|10\rangle & \langle 11|L_y|1-1\rangle \\ \langle 10|L_y|11\rangle & \langle 10|L_y|10\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Delovanje operatorja L_y na stanje Ψ_{lm}, to je $L_y|lm\rangle$ izrazimo z L_+ in L_- kot $L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i}$, kjer sta

$$L_\pm|l\ m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l\ m\pm 1\rangle$$

Uporabimo to na

$$L_y|11\rangle = -\frac{\hbar}{2i}\sqrt{2}|10\rangle$$

$$L_y|10\rangle = \frac{\hbar}{2i}(\sqrt{2}|11\rangle + \sqrt{2}|1-1\rangle)$$

$$L_y|1-1\rangle = \frac{\hbar}{2i}\sqrt{2}|10\rangle$$

Ko množimo vsakega od zgornjih izrazov še z leve s stanji $|11\rangle$,$|10\rangle$,$|1-1\rangle$ ter upoštevamo ortogonalnost lastnih stanj $\langle lm|ln\rangle = \delta_{mn}$, dobimo vse matrične elemente matrike L_y. Zapišimo raje matriko

$$\mathbf{L_y i}/\hbar = \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Enačba(1) zahteva potence matrike M, zato izračunamo M^2, M^3 in M^4.

$$\mathbf{M^2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ugotovimo še $M^3 = -M$ ter $M^4 = -M^2$. Sedaj lahko enačbo(1) zapišemo kot

$$A = e^{iL_y\theta/\hbar} = I + M\sum_{n\ lih}\frac{\theta^n}{n!}(-1)^{(n-1)/2} + M^2\sum_{n\ sod\ ,n\neq 0}\frac{\theta^n}{n!}(-1)^{(n-2)/2} =$$

$$= I + Msin\theta + M^2(1-cos\theta)$$

Torej

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}(1-cos\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}sin\theta & \frac{1}{2}(1-cos\theta) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}sin\theta & 1-(1-cos\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}sin\theta \\ \frac{1}{2}(1-cos\theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}sin\theta & 1-\frac{1}{2}(1-cos\theta) \end{pmatrix}$$

Če $cos\theta$ in $sin\theta$ izrazimo s polovičnimi koti dobimo poenostavljeno končni izraz za iskani operator vrtenja.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} cos^2\frac{\theta}{2} & \sqrt{2}sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} & sin^2\frac{\theta}{2} \\ -\sqrt{2}sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} & cos^2\frac{\theta}{2}sin^2\frac{\theta}{2} & \sqrt{2}sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} \\ sin^2\frac{\theta}{2} & -\sqrt{2}sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} & cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

3 Uporaba pri nalogi 'Vrtilna količina I'

Če delujemo na stanje $|11\rangle$, ki se v vektorju zapiše kot $|\Psi\rangle = (1,0,0)$, dobimo enak rezultat kot če rešujemo preko menjave baze ter reševanjem sistema treh enačb s tremi neznankami.

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos^2\frac{\theta}{2} \\ \sqrt{2}sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} \\ sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = cos^2\frac{\theta}{2}|11\rangle' - \sqrt{2}sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}|10\rangle' + sin^2\frac{\theta}{2}|1-1\rangle'$$

Časovni razvoj je oblike [1]

$$|\Psi,t\rangle = cos^2\frac{\theta}{2}|11\rangle' e^{i\lambda Bt} - \sqrt{2}sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}|10\rangle' + sin^2\frac{\theta}{2}|1-1\rangle' e^{-i\lambda Bt}$$

Izračunati moramo še $\langle \vec{L},t\rangle = (\langle L'_x,t\rangle,\langle L'_y,t\rangle,\langle L'_z,t\rangle)$. Začnimo z L'_z. Zanj v novem sistemu velja $L'_z|lm\rangle' = m\hbar|ml\rangle'$. Ob upoštevanju tega ter ortogonalnosti sistema novih lastnih funkcij $'\langle lm|ln\rangle' = \delta_{mn}$ dobimo

$$\langle L'_z,t\rangle = \langle \Psi,t|L'_z|\Psi,t\rangle =$$

$$= \underbrace{(cos^2\frac{\theta}{2}\langle 11|' e^{-i\lambda Bt} - \sqrt{2}sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}\langle 10|' + sin^2\frac{\theta}{2}\langle 1-1|' e^{i\lambda Bt})}_{\langle \Psi,t|}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{(1\cdot\hbar cos^2\frac{\theta}{2}|11\rangle' e^{+i\lambda Bt} - (-1)\cdot\hbar sin^2\frac{\theta}{2}|1-1\rangle' e^{-i\lambda Bt})}_{|L'_z|\Psi,t\rangle}$$

$$= \hbar(cos^4\frac{\theta}{2} - sin^4\frac{\theta}{2}) = \hbar(cos^2\frac{\theta}{2} - sin^2\frac{\theta}{2}) = \hbar cos\theta$$

Za $\langle L'_x,t\rangle,\langle L'_y,t\rangle$ uporabimo tile dve relaciji $L'_x = \frac{L'_+ + L'_-}{2}$ ter $L'_y = \frac{L'_+ - L'_-}{2i}$ ter še $L'_+ = (L'_-)^*$. Torej dobimo $\langle L'_x,t\rangle = \frac{\langle L'_+,t\rangle + \langle L'_-,t\rangle}{2}$, itd...

$$\langle L'_+,t\rangle = \langle \Psi,t|L'_+|\Psi,t\rangle = \underbrace{(cos^2\frac{\theta}{2}\langle 11|' e^{-i\lambda Bt} - \sqrt{2}sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}\langle 10|' + sin^2\frac{\theta}{2}\langle 1-1|' e^{i\lambda Bt})}_{\langle \Psi,t|}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{(-\sqrt{2}sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2}\hbar|11\rangle' + sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{2}\hbar|10\rangle' e^{-i\lambda Bt})}_{|L'_+|\Psi,t\rangle} =$$

Opomba[2]

$$= -2\hbar sin\frac{\theta}{2}cos^3\frac{\theta}{2}e^{-i\lambda Bt} - 2\hbar sin^3\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}e^{-i\lambda Bt} = -2\hbar sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}e^{-i\lambda Bt} = -\hbar sin\theta e^{-i\lambda Bt}$$

$$\langle L'_+,t\rangle = \langle L'_-,t\rangle^* = -\hbar sin\theta e^{i\lambda Bt}$$

Ob upoštevanju izrazov $cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ter $sinx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ dobimo končno:

$$\langle L'_x,t\rangle = \frac{\langle L'_+,t\rangle + \langle L'_-,t\rangle}{2} = -\hbar sin\theta cos(\lambda Bt)$$

$$\langle L'_y,t\rangle = \frac{\langle L'_+,t\rangle - \langle L'_-,t\rangle}{2i} = \hbar sin\theta sin(\lambda Bt)$$

$$\langle L'_z,t\rangle = \hbar cos\theta$$

[1] Glej nalogo 'Vrtilna količina I'

[2] upoštevaj kako L'_+ deluje na stanje $|lm\rangle$