Končna potencialna jama 2

Petar Milošević

Naloga : a) Poišči lastne energije in lastne funkcije neskončne potencialne jame
b) Obravnavaj lastne energije in lastne funkcije za delec v končni potencialni jami v limiti, ko gre $V_o \to \infty$ in pri tem ostaja $aV_o = konst.$

a)

Valovne funkcije :

$$\Psi_1(x) = Ae^{k_1 x}$$
$$\Psi_2(x) = B_1 e^{ik_2 x} + C_1 e^{-ik_2 x} = B\cos k_2 x + C\sin k_2 x$$
$$k_1 = \frac{\sqrt{V_0 \, 2m}}{\hbar}$$

Nadalje ločimo lihi in sodi primer. Pri lihi rešitvi vzamemo pri drugi funkciji samo nastavek s sinusom, pri sodi pa nastavek s cosinusom.

Robni pogoji :

$$\Psi_1(\tfrac{-a}{2}) = \Psi_2(\tfrac{-a}{2}) \qquad \Psi_2(\tfrac{a}{2}) = \Psi_3(\tfrac{a}{2})$$
$$\frac{\partial \Psi_1(\frac{-a}{2})}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_2(\frac{-a}{2})}{\partial x} \qquad \frac{\partial \Psi_2(\frac{a}{2})}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_3(\frac{a}{2})}{\partial x}$$

Iz prvih dveh enačb robnega pogoja in drugih dveh enačb dobimo isti pogoj za vezano stanje (2 enačbi z dvema neznankama, ki je rešljiva, ko je determinanta enaka 0).

(SODI primer) :

$$tg(k_2 \tfrac{a}{2}) = \frac{k_1}{k_2}$$

(LIHI primer) :

$$ctg(k_2 \tfrac{a}{2}) = -\frac{k_1}{k_2}$$

Določimo :

$$u = k_2 \tfrac{a}{2}$$
$$u_0 = k_0 \tfrac{a}{2}$$

velja $k_0^2 = k_1^2 + k_2^2 = \frac{V_0 2m}{\hbar^2}$

S pomočjo vpeljanih spremenljivk dobimo brezdimenzijsko obliko za vezano stanje :

$$tg(u) = \sqrt{(\tfrac{u_o}{u})^2 - 1}$$

$$-ctg(u) = \sqrt{(\tfrac{u_o}{u})^2 - 1}$$

Ker pa imamo neskončno potencialno jamo sledi :

$V_0 \to \infty$, kar pomeni $u_0 \to \infty$ saj velja $k_0^2 = \frac{V_0 2m}{\hbar^2} \Leftrightarrow (\frac{u_0}{\frac{a}{2}})^2 = \frac{V_0 2m}{\hbar^2}$

Tako so rešitve vezanih stanj za neskončno potencialno jamo :

(SODI primer)

$$tg(u) = \infty$$
$$u = \tfrac{\pi}{2} + n\pi$$

(LIHI primer)

$$ctg(u) = \infty$$
$$u = n\pi / \{0\}$$

<u>Lastne energije v jami</u> :

$$E = \frac{k_2^2 \hbar^2}{2m} = \frac{2\hbar^2 u^2}{ma^2}$$

(SODI primer)

$$E = \frac{2\hbar^2}{ma^2}(\tfrac{\pi}{2} + n\pi)^2$$

(LIHI primer)

$$E = \frac{2\hbar^2}{ma^2}(n\pi)^2$$

<u>Lastne funkcije v jami</u> :

(SODE)

$$\psi_2(x) = B\cos(k_2 x); k_2 = \tfrac{2}{a}(\tfrac{\pi}{2} + n\pi)$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \psi_2^* \psi_2 dx = 1 \Rightarrow B = \sqrt{\tfrac{2}{a}}$$

$$\boxed{\psi_2(x) = \sqrt{\tfrac{2}{a}}\cos(k_2 x)}$$

(LIHE)

$$\psi_2(x) = C\sin(k_2 x); k_2 = \tfrac{2}{a} n\pi$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \psi_2^* \psi_2 dx = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\tfrac{2}{a}}$$

$$\boxed{\psi_2(x) = \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(k_2 x)}$$

b) $V_0 \to \infty \Leftrightarrow u_0 \to \infty$

Določimo neki majhen ε , da velja : $u = u_0 - \varepsilon; \varepsilon \ll u_0$

$\Rightarrow tg(u) \cong u$ (razvoj tangensa do prvega člena)

$$u = u_0 - \varepsilon$$

$$\sqrt{(\tfrac{u_0}{u})^2 - 1} = u_0 - \varepsilon$$

$$\sqrt{\tfrac{u_0^2 - u^2}{u^2}} = u_0 - \varepsilon$$

$$\sqrt{\tfrac{u_0^2 - (u_0 - \varepsilon)^2}{(u_0 - \varepsilon)^2}} = u_0 - \varepsilon$$

$$2u_0\varepsilon = (u_0 - \varepsilon)^4$$

Majhne člene pri potenciranju zanemarimo, ostane nam $\varepsilon = \frac{u_0^3}{2} \Rightarrow u = u_0 - \frac{u_0^3}{2}$

<u>Lastna energija</u>

$$u = k_2 \tfrac{a}{2} = u_0(1 - \tfrac{u_0^2}{2})$$

$$E = -\tfrac{k_2^2 \hbar^2}{2m} \Rightarrow k_2 = \tfrac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\tfrac{a}{2}\tfrac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = u_0(1 - \tfrac{u_0}{2})^2 \quad \text{/ kvadriramo}$$

$$\frac{a^2}{4}\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} \cong u_0^2(1-u_0^2)$$

Z upoštevanjem, da je $u_0 = k_0\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{V_0 2m}}{\hbar}\frac{a}{2}$ dobimo energijo v jami :

$$\boxed{E = -\frac{V_0^2 a^2 m}{2\hbar^2}}$$

Lastno nihanje

Obstaja samo sodi del v tem limitnem primeru. Ker a limitira proti 0 je funkcija v jami ničelna. Ostaneta samo funkciji izven jame :

$$\Psi_1(x) = Ae^{k_1 x}$$

$$\Psi_3(x) = De^{-k_1 x} \quad ; \quad k_1 = \frac{\sqrt{V_0 2m}}{\hbar}$$

Obe funkciji morata biti normalizirani z A in D v danih mejah.