Časovni razvoj delta funkcije

Matej Debenc

Naloga:

- Izračunaj časovni razvoj delta funkcije prostega delca, ki je ob času t=0 na mestu x=x': $\Psi(x,0)=\delta(x-x')$
- Poišči Greenovo funkcijo za časovno odvisno Schrödingerjevo enačbo za proste delce v potencialu V(x,t).

Časovni razvoj delta funkcije:
$\Psi(x,t)=\int\delta(x-x')\Psi(x',t)dx'$ računamo za proste delce V(x)=0.
Razvijemo po ravnih valovih in dodamo časovni del:

$$\delta(x-x',t)=\int A(k)e^{ikx}dk \qquad A(k)=\frac{1}{2\pi}\int\delta(x-x')e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}e^{ikx'}$$

$\delta(x-x')=\int e^{ik(x-x')}dk$ dodamo časovni del: $e^{-i\omega t}=e^{\frac{-ik^2\hbar t}{2m}}$

$$\delta(x-x',t)=\int e^{ik(x-x')-\frac{ik^2\hbar t}{2m}}dk$$

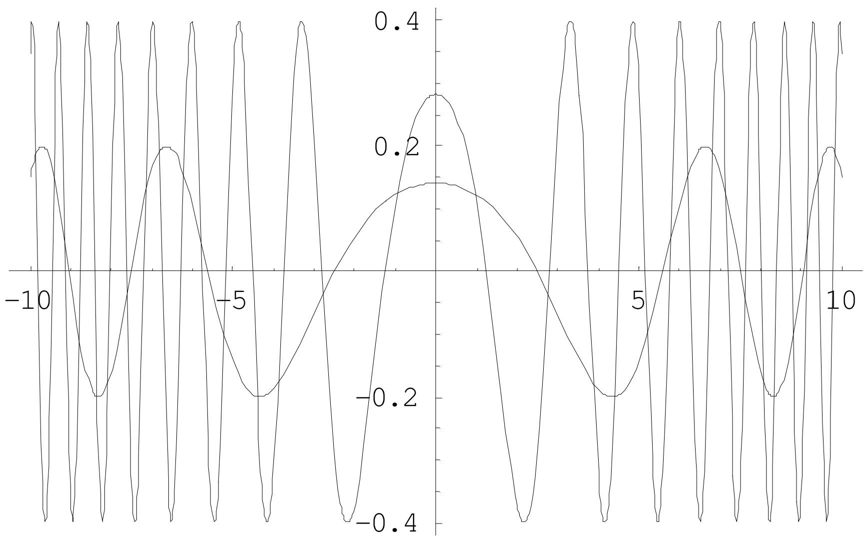
eksponent razvijemo kot popolni kvadrat, da lahko uvedemo novo integracijsko spremenljivko:

$$ik(x-x')-\frac{ik^2\hbar t}{2m}=\frac{-i\hbar t}{2m}\left(k-\frac{(x-x')m}{\hbar t}\right)^2+\frac{i(x-x')^2m}{2\hbar t}$$

$$\delta(x-x',t)=\int e^{\frac{-i\hbar t}{2m}\left(k-\frac{(x-x')m}{\hbar t}\right)^2+\frac{i(x-x')^2m}{2\hbar t}}dk=e^{\frac{i(x-x')^2m}{2\hbar t}}\int e^{\frac{-i\hbar t}{2m}\left(k-\frac{(x-x')m}{\hbar t}\right)^2}dk$$

Tak integral pa ima vrednost: $\int e^{-iu^2}du=\sqrt{i\pi}$

Tako dobimo na koncu rezultat: $\delta(x-x',t)=\sqrt{\frac{im}{2\pi\hbar t}}e^{\frac{i(x-x')^2m}{2\hbar t}}$



Graf časovno odvisne delta funkcije za dva različna časa.

Greenova funkcija:
Časovnemu razvoju delta funkcije spremenimo t v t-t', da dobimo časovno odvisnost. Tako dobimo:

$$K(x,t;x',t') = \sqrt{\frac{im}{2\pi\hbar(t-t')}} e^{\frac{i(x-x')^2 m}{2\hbar t}}$$

Greenova funkcija pa je definirana kot: $G(x,t;x't') = K(x,t;x't')\Theta(t-t')\left(\frac{-i}{\hbar}\right)$

Seveda je definirana le za čas večji od t'.
Sedaj pa želimo pokazati, da je ta funkcija Greenova funkcija za časovno odvisno Schrödingerjevo enačbo:

$(E-H)G(x,x') = \delta(x-x')$ oziroma $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)G(x,t:x't') = \delta(x-x')\delta(t-t')$

vstavimo Greenovo funkcijo in odvajamo:

$K(x,t;x't')i\hbar\delta(t-t')\left(\frac{-i}{\hbar}\right) = K(x,t';x't')\delta(x-x')\delta(t-t')$ vidimo, da je rezultat enak kot zgoraj.

Sedaj pa dodajmo še časovno odvisen potencial: $H = H_0 + V(x,t)$.
Če je Ψ rešitev Schrödingerjeve enačbe lahko zapišemo:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0 - V(x,t)\right)\Psi(x,t) = 0$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)\Psi(x,t) = V(x,t)\Psi(x,t) = \int V(x',t')\Psi(x',t')\delta(x-x')\delta(t-t')dx'dt' =$$

$$= \int V(x',t')\Psi(x',t')\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)G(x,t;x't')dx'dt'$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)\left[\Psi(x,t) - \int V(x't')\Psi(x',t')G(x,t;x't')dx'dt'\right] = 0$$

$$\Psi(x,t) = \int V(x',t')\Psi(x',t')G(x,t;x't')dx'dt' + \Phi(x,t),$$

če je $i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = H_0\Phi$ rešitev časovno odvisne Schrödingerjeve enačbe. Tako smo na koncu dobili časovno odvisno Lipmann-Schwinger-jevo enačbo.