2D HARMONSKI OSCILATOR II

Luka Debenjak

Naloga: Delec se giblje v potencialu:

$$V(x,y) = ax^2 + 2bxy + ay^2.$$

Izračunaj energijski spekter v posebnem primeru ko $b = 0$. Pokaži, da valovno funkcijo v tem primeru lahko zapišemo kot produkt $R(r)F(\varphi)$, kjer sta r in φ polarni koordinati.

Rešitev:
Začnemo s Hamiltonovo funkcijo:
$H = \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m} + ax^2 + 2bxy + ay^2 = \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m} + ax^2 + ay^2$; $(b = 0)$

Imamo že separirane koordinate in iz izkušenj iz prejšne naloge lahko zapišemo Sch. enačbo za vsako koordinato posebej, od koder dobimo energijo, ki pripada posamezni koordinati. Se pravi:

$$E_\alpha = \hbar\omega_\alpha(n_\alpha + \frac{1}{2})$$

$$E_\beta = \hbar\omega_\beta(n_\beta + \frac{1}{2})$$

Frekvenci sta isti, ker je $b = 0$. $\omega_\alpha = \omega_\beta = \omega$. Tako dobimo celotno energijo:

$$E = \hbar\omega(n_\alpha + n_\beta + 1).$$

Poglejmo si energijski spekter:
osnovno stanje: $E = \hbar\omega$; $n_\alpha = 0, n_\beta = 0$
1. vzbujeno stanje: $E = 2\hbar\omega$; $n_\alpha = 1, n_\beta = 0$ ali $n_\alpha = 0, n_\beta = 1$
2. vzbujeno stanje $E = 3\hbar\omega$; 1,1 ali 2,0 ali 0,2
itd.

Zapišimo Hamiltonov operator v cilindričnih koordinatah:
$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + a(r\cos\varphi)^2 + a(r\sin\varphi)^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + ar^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + ar^2.$

Uporabli smo enačbo : $\hat{p} = -i\hbar\nabla$. V cilindričnih koordinatah pa se ∇^2 glasi: $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.

Nastavimo : $\Psi = F(r)G(\varphi)$. In vstavimo v Sch. enačbo:

$-\frac{\hbar^2}{2m}(G\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial F}{\partial r}) + F\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}) + ar^2 FG = EFG$
$-\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{1}{F}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial F}{\partial r}) + \frac{1}{G}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}) + ar^2 = E = konst.$

Ker je na desni strani enačbe konstanta, imamo tudi na levi vsoto dveh konstant:

$$\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = k^2$$

$$\frac{\partial G^2}{\partial \varphi^2} = k^2 G$$

$$G = Ash(k\varphi) + Bch(k\varphi)$$

To ni prava rešitev ker ni periode po φ -ju. Malo spremenimo konstanto:

$$\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = -k^2$$

$$\frac{\partial G^2}{\partial \varphi^2} = -k^2 G$$

$$G = Ae^{ik\varphi} + Be^{-ik\varphi}$$

Periodičnost po φ -ju je izpolnjena če velja: $G(\varphi + 2\pi) = G(\varphi)$
oz. $e^{ik2\pi} = 1$.
Se pravi: $k \in \mathbb{Z}$
In lahko zapišemo : $G_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}$.
Konstanta spredaj je zaradi normalizacije: $\int_0^{2\pi} \mid G_n(\varphi)^2 \mid = 1$
Od Sch. enačbe nam je ostalo:

$$-\frac{\hbar}{2m}\Big((\frac{1}{F}r\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{F}r^2\frac{\partial^2 F}{\partial^2 r}) + (-n^2)\Big) + ar^4 = Er^2.$$

Od tod dobimo rešitve za F(r), kar pa se izračuna precej težje kot G(φ). Dobili pa bi neke hipergeometrijske funkcije.
Pomembno je, da ko imamo potencial odvisen samo od r-ja, lahko takoj dobimo funkcije za kotni del: $G_n \propto e^{in\varphi}$.
Poglejmo če ima kotni del valovne funkcije res obliko G_n. Vzemimo prvo vzbujeno stanje.
$E_1 = 2\hbar\omega$

$n_\alpha = 1,\, n_\beta = 0 \longrightarrow \frac{a_\alpha^{+n_\alpha}}{\sqrt{n_{\alpha!}}} \mid 00 >= a_\alpha^+ \mid 00 >$
$n_\alpha = 0,\, n_\beta = 1 \longrightarrow \frac{a_\beta^{+n_\beta}}{\sqrt{n_{\beta!}}} \mid 00 >= a_\beta^+ \mid 00 >$
Kar lahko zapišemo tudi kot:

$$\Psi_{10}(x) = \Psi_1(x)\Psi_0(y)$$
$$\Psi_{01}(x) = \Psi_0(x)\Psi_1(y)$$

$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$
$\Psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}x}{x_0} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$
Zmnožimo:
$\Psi_{10} = \frac{\sqrt{2}x}{x_0} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}} e^{-\frac{y^2}{2x_0^2}} = \frac{\sqrt{2}r \cos\varphi}{x_0} \frac{1}{\sqrt{\pi x_0^2}} e^{-\frac{r^2}{2x_0^2}}$
$\Psi_{01} = \frac{\sqrt{2}y}{x_0} \frac{1}{\sqrt{\pi x_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} e^{-\frac{y^2}{2x_0^2}} = \frac{\sqrt{2}r \sin\varphi}{x_0} \frac{1}{\sqrt{\pi x_0^2}} e^{-\frac{r^2}{2x_0^2}}$
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ je ravno sorazmerno linearni kombinaciji kotnega dela Ψ_{10} in Ψ_{01}. Rešitev je torej linearna kombinacija teh dveh valovnih funkcij:

$$\Psi_\pm = (\Psi_{10} \pm i\Psi_{01})\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Zraven je še faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zaradi normalizacije.