Kvantna mehanika I - vaje
Koherentna stanja harmonskega oscilatorja II

Andrej Premelč

1. april 2004

1 Naloga

Delec z nabojem e je v osnovnem stanju harmonskega oscilatorja ($H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$). Ob $t = 0$ v trenutku vključimo homogeno električno polje E. Izračunaj časovno odvisnost položaja, gibalne količine in energije delca ter nedoločenosti teh količin. Pokaži, da so pri makroskopskih nihanjih odstopanja od pričakovanih vrednosti zanemarljiva

2 Uvod

Reševanje naloge se v veliki meri navezuje na rezultate prejšnje vaje, kjer smo razvili koherentno stanje oscilatorja po njegovih lastnih stanjih, naredili časovni razvoj koherentnega stanja ter izračunali izraze za $\langle x\rangle$ in $\langle p\rangle$. Naj najprej torej zapišem povzetek vseh teh dognanj:

$$
\begin{aligned}
a\,|0\rangle &= 0 && (1)\\
a\,|z\rangle &= z\,|z\rangle && (2)\\
|z\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{a^\dagger z}\,|0\rangle && (3)\\
|z(t)\rangle &= e^{-\frac{1}{2}i\omega t}\,|ze^{i\omega t}\rangle && (4)\\
\langle x\rangle &= \sqrt{2}x_0\mathbb{R}\mathrm{e}(z) && (5)\\
\langle p\rangle &= \sqrt{2}p_0\mathbb{I}\mathrm{m}(z) && (6)\\
x_0 &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} && (7)\\
p_0 &= \frac{\hbar}{x_0} && (8)\\
\delta x &= \frac{x_0}{\sqrt{2}} && (9)\\
\delta p &= \frac{p_0}{\sqrt{2}} && (10)
\end{aligned}
$$

Spomnimo se še, kaj sta anihilacijski in kreacijski operator ter njun komutator:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right) \quad (11)$$

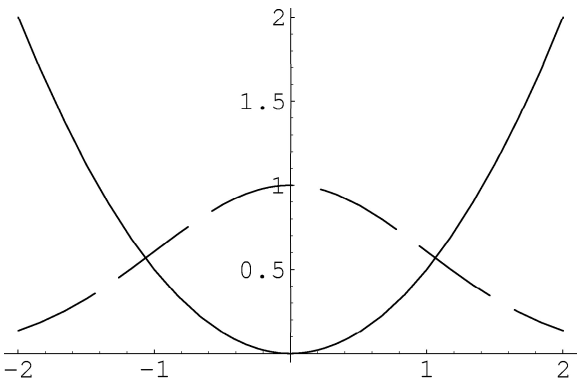
$$
\begin{aligned}
a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - i\frac{p}{p_0}\right) && (12)\\
\left[a, a^\dagger\right] &= 1 && (13)
\end{aligned}
$$

3 Reševanje

Zdaj lahko končno začnemo. V odsotnosti polja se nahajamo v paraboličnem potencialu in harmonični oscilator opisuje tale Hamiltonian

$$
H_1 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{14}
$$

Skica potenciala (cela črta) in valovne funkcije osnovnega stanja $|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$ (črtkana črta):



Ko pa prižgemo polje, se spremeni potencial in posledično tudi Hamiltonian

$$
\begin{aligned}
H_2 &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 - eEx = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(x - \frac{eE}{k}\right)^2 - \frac{e^2E^2}{2k} && (15)\\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(x-c)^2 - \Delta E = \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{k\tilde{x}^2}{2} - \Delta E = H_2 && (16)
\end{aligned}
$$

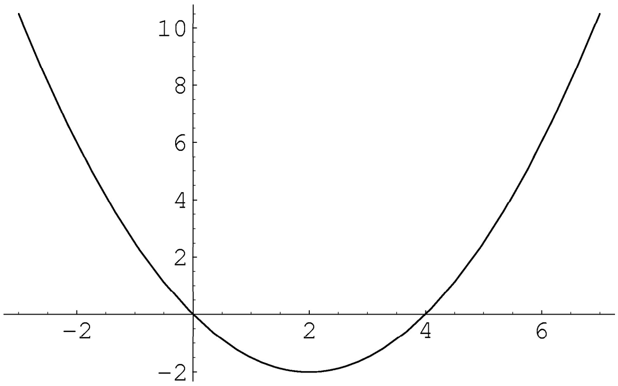
Potencialni del smo preoblikovali v popolni kvadrat in definirali nekaj novih količin:

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{eE}{k} && (17)\\
\Delta E &= \frac{e^2E^2}{2k} && (18)\\
\tilde{x} &= x - c && (19)
\end{aligned}
$$

$$
p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \tilde{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} = p \Rightarrow \tilde{p} = p, \tag{20}
$$

saj je $\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} = 1$. Potencial je, kot prej, paraboličen, le da je premaknjen (za c v levo in ΔE navzdol)[1]:

[1]Graf naj služi le kot zanimivost, saj enote x in y osi nimajo prav nobene zveze z nalogo



V novih[2] koordinatah zapišimo še a in $a^\dagger$:

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\tilde{x}}{x_0} + i\frac{\tilde{p}}{p_0}\right) & (21)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-c}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right) & (22)\\
&= a - \frac{c}{x_0\sqrt{2}} & (23)\\
\tilde{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\tilde{x}}{x_0} - i\frac{\tilde{p}}{p_0}\right) & (24)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-c}{x_0} - i\frac{p}{p_0}\right) & (25)\\
&= a^\dagger - \frac{c}{x_0\sqrt{2}} & (26)
\end{aligned}$$

Sedaj lahko za računanje uporabimo formalizem, ki smo ga izpeljali na prejšnji vaji in ponovili v uvodu. Izračunajmo koherentno stanje z!

$$\tilde{a}\,|0\rangle = 0 - \frac{c}{x_0\sqrt{2}}\,|0\rangle \Rightarrow z = -\frac{c}{x_0\sqrt{2}} \tag{27}$$

In še njegov časovni razvoj. Ker smo premaknili energijo, moramo popraviti fazni faktor!

$$|z(t)\rangle = e^{-it(\frac{1}{2}\omega - \frac{\Delta E}{\hbar})}\,|ze^{i\omega t}\rangle \tag{28}$$

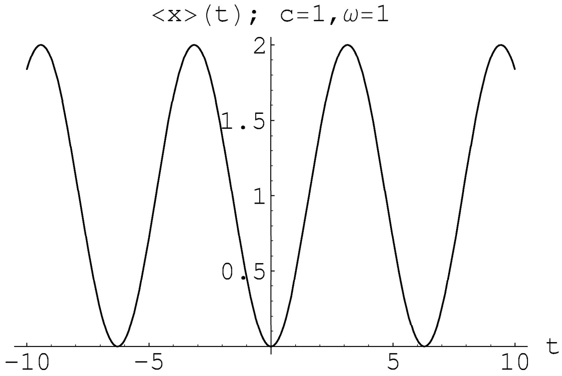
S tema podatkoma lahko z uporabo (5) izračunamo $\langle\tilde{x}(t)\rangle$

$$\langle\tilde{x}(t)\rangle = \sqrt{2}x_0 z \mathbb{R}\mathrm{e}\ e^{i\omega t} = -c\cos(\omega t) \tag{29}$$

Če se spomnimo na (19), lahko zapišemo

$$\langle x(t)\rangle = c(1-\cos(\omega t)) \tag{30}$$

[2] $\tilde{x}, \tilde{p}$



Za nedoločenost koordinate poglejmo tri liste nazaj, kjer najdemo enačbo (9). Ugotovimo, da je nedoločenost položaja neodvisna od premika koordinatnega sistema in znaša

$$\delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{31}$$

Za izračun $\langle p(t)\rangle$ postopamo popolnoma enako, kot prej, le da tokrat uporabimo enačbi (6) in (8):

$$\langle p(t)\rangle = m\omega c \sin(\omega t) \tag{32}$$

Kar bi lahko izračunali tudi z uporabo Ehrenfestovega teorema, ki med drugim pravi

$$\langle p\rangle = m\dot{\langle x\rangle} \tag{33}$$

Tudi nedoločenost gibalne količine je neodvisna od izbire koordinatnega sistema (9) in znaša

$$\delta p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \tag{34}$$

Seveda lahko preverimo še slavno Heisenbergovo načelo

$$\delta p \delta x = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \frac{\hbar}{2} \tag{35}$$

in z zadovoljstvom ugotovimo, da ga nismo prekršili. Dolžni smo še pričakovano vrednost energije in njeno nedoločenost. Žal se tu ne da samo prepisati formul in v njih vstaviti izračunane vrednosti, ampak bo treba premetavati braje in kete. Najprej prepišemo (16) v

$$H_2 = \hbar\omega\left(\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + \frac{1}{2}\right) - \Delta E \tag{36}$$

in v nadaljnem računu postavimo začetni premik energije na nič ($\Delta E = 0$), da bo manj pisanja[3]. Zatem nas čaka pričakovana vrednost energije, ki je kar $\langle H_2\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \langle H_2\rangle = \langle\hbar\omega\left(\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + \frac{1}{2}\right)\rangle = \hbar\omega\left(\langle z|\tilde{a}^\dagger\tilde{a}|z\rangle + \frac{1}{2}\langle z|z\rangle\right) \\
&= \hbar\omega\left(\langle\tilde{a}z|\tilde{a}z\rangle + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(z^* z + \frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar\omega\left(|z|^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{eEm\omega}{k}\right)^2 + 1\right)
\end{aligned}$$

[3]s tem smo zgolj premaknili energijsko skalo in nič drugega

$$\langle E\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\left(\frac{eE}{k}\right)^2 + 1\right) \tag{37}$$

Za izračun δE potrebujemo še $\langle E^2\rangle$. Pri tem opravilu bomo potrebovali tole zvezo

$$\tilde{a}\tilde{a}^\dagger = 1 + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}, \tag{38}$$

ki sledi iz komutatorske relacije (12):

$$\left[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\right] = \tilde{a}\tilde{a}^\dagger - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} = 1 \Longrightarrow \tilde{a}\tilde{a}^\dagger = 1 + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}$$

$$\begin{aligned}
\langle E^2\rangle &= \langle H_2^2\rangle = \langle z|H_2^2|z\rangle = \hbar^2\omega^2\Bigg(\langle z|\tilde{a}^\dagger\tilde{a}\tilde{a}^\dagger\tilde{a}|z\rangle + \frac{1}{4}\langle z|z\rangle + \langle z|\tilde{a}^\dagger\tilde{a}|z\rangle \\
&= \hbar^2\omega^2\left(\langle\tilde{a}z|\tilde{a}\tilde{a}^\dagger|\tilde{a}z\rangle + \frac{1}{4} + z^*z\right) \\
&= \hbar^2\omega^2\left(z^*\langle z|1 + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}|z\rangle z + \frac{1}{4} + |z|^2\right) \\
&= \hbar^2\omega^2\left(|z|^2 + |z|^4 + \frac{1}{4} + |z|^2\right) \\
&= \hbar^2\omega^2\left(|z|^4 + 2|z|^2 + \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\langle E^2\rangle = \hbar^2\omega^2\left(|z|^4 + 2|z|^2 + \frac{1}{4}\right) \tag{39}$$

Končno izračunajmo nedoločenost energije...

$$\begin{aligned}
(\delta E)^2 &= \langle E^2\rangle - (\langle E\rangle)^2 = \hbar^2\omega^2\left(|z|^4 + 2|z|^2 + \frac{1}{4}\right) - \hbar^2\omega^2\left(|z|^4 + |z|^2 + \frac{1}{4}\right) \\
&= \hbar^2\omega^2|z|^2
\end{aligned}$$

Torej

$$\delta E = \hbar\omega|z| = \frac{\omega eE}{k}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \tag{40}$$

Recimo, da imamo makroskopsko nihalo s parametroma $m = 1\text{kg}$ in $\omega = 1\text{Hz}$. Potem je red velikosti nedoločenosti posameznih količin naslednji

$$\begin{aligned}
\delta x &\approx 10^{-14}\text{m} \\
\frac{\delta E}{\langle E\rangle} &\approx 10^{-14},
\end{aligned}$$

kar je popolnoma nemerljivo, torej lahko makroskopsko nihalo brez strahu obravnavamo tudi, če nimamo pojma o kvantni mehaniki.