Koherentna stanja I

- Razvij koherentno stanje harmonskega oscilatorja po lastnih stanjih.
- Izračunaj časovni razvoj koherentnega stanja.
- Izračunaj produkt nedoločenosti položaja in gibalne količine delca v koherentnem stanju harmonskega oscilatorja.

1 Koherentna stanja

Koherentna stanja so lastna stanja anihilacijskega operatorja a s predpisom:

$$a|\psi\rangle = z|\psi\rangle \qquad z \in \mathbb{C}$$

Lastna vrednost z je v splošnem kompleksna, saj operator a ni hermitski. Lastno stanje, ki pripada lastni vrednosti z, označimo z:

$$a|z\rangle = z|z\rangle \tag{1}$$

Koherentno stanje razvijemo po lastnih stanjih:

$$|z\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \tag{2}$$

in to definicijo vstavimo v (1), pri tem upoštevamo $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} z\,c_n\,|n\rangle$$

Zaradi ortogonalnosti lastnih stanj $|n\rangle$ se morajo ujemati členi pred enakimi lastnimi funkcijami:

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = z\,c_n \longrightarrow c_{n+1} = \frac{z}{\sqrt{n+1}}\,c_n$$

Poskusimo izraziti poljuben člen z začetnim c_0:

$$c_1 = \frac{z}{\sqrt{1}}\,c_0, \quad c_2 = \frac{z^2}{\sqrt{1}\,\sqrt{2}}\,c_0, \quad c_3 = \frac{z^3}{\sqrt{1}\,\sqrt{2}\,\sqrt{3}}\,c_0, \ldots$$

$$c_n = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,c_0 \tag{3}$$

Tako smo izrazili splošen člen iz začetnega c_0, ki je zaenkrat še poljuben. Fiksiramo ga z normalizacijo:

$$\langle z|z\rangle = 1$$

Splošen člen iz (3) vstavimo v (2), tako da dobimo zvezi:

$$|z\rangle = \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} c_0 |n\rangle \tag{4}$$

$$\langle z| = \sum_n \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} {c_0}^* |n\rangle$$

Ti dve zvezi vstavimo v normalizacijski pogoj:

$$\langle z|z\rangle = \sum_m \frac{z^{*m}}{\sqrt{m!}} c_0^* \langle m| \sum_n \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} c_0^* |n\rangle$$

Sedaj upoštevamo ortonormiranost lastnih stanj ($\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$) in normalizacijo:

$$1 = \sum_n \frac{(z^* z)^n}{n!} c_0^* c_0$$

Spomnimo se, da velja $z^* z = |z|^2$ in $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$, tako da poenostavimo izraz v:

$$|c_0|^2 = e^{-|z|^2}$$

$$c_0 = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \tag{5}$$

Člen (5) vstavimo v (4):

$$\underline{|z\rangle = \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} |n\rangle} \tag{6}$$

Spomnimo se, kako s pomočjo kreacijskega operatorja a^+ tvorimo $|n\rangle$ iz $|0\rangle$:

$$|n\rangle = \frac{{a^+}^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

To vstavimo v (6) in dobimo:

$$|z\rangle = \sum_n \frac{z^n}{n!} e^{-\frac{|z|^2}{2}} a^{+n} |0\rangle$$

$$\underline{|z\rangle = e^{a^+ z} e^{-\frac{|z|^2}{2}} |0\rangle} \tag{7}$$

Tako smo prišli do razvoja koherentnega stanja, izraženega z osnovnim stanjem.

2 Časovni razvoj

Enačba (7) ni primerna za časovni razvoj, saj se nočemo ubadati s členom $e^{a^+ z}$. Zato raje uporabimo enačbo (6), saj vemo, kakšen je časovni razvoj lastnih stanj $|n\rangle$:

$$|z, t\rangle = \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} |n\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_n \frac{(z\, e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{a^{+n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle =$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{a^+ z\, e^{-i\omega t}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} |0\rangle$$

$$\underline{|z, t\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} \left|z\, e^{-i\omega t}\right\rangle}$$

3 Nedoločenost položaja in gibalne količine

Nedoločenost poljubne količine A se izračuna kot:

$$\delta A = \sqrt{< A^2 > - < A >^2} \qquad < A >= \langle\psi| A |\psi\rangle \tag{8}$$

Z $< A >$ označimo pričakovano vrednost količine $< A >$.

3.1 Nedoločenost δx

Zračunajmo pričakovano vrednost koordinate x:

$$< x >= \langle z| x |z\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle z| a + a^+ |z\rangle$$

Upoštevali smo, da se operator za x izraža s kreacijskim in anihilacijskim operatorjem kot $x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^+)$. Sedaj upoštevamo še (1) in $\langle z| a^+ |z\rangle = \langle a\, z|z\rangle = z^* \langle z|z\rangle = z^*$, in dobimo:

$$< x >= \frac{x_0}{\sqrt{2}}(z + z^*)$$

$$< x >= \sqrt{2}\, x_0\, Re(z) \tag{9}$$

Preden si pogledamo $< x^2 >$, izračunajmo še:

$$\underline{\langle z| a^{+n} a^m |z\rangle} = \langle a^n z| a^m |z\rangle = \langle z^n z| z^m |z\rangle = z^{*n} z^m \langle z|z\rangle = \underline{z^{*n} z^m}$$

Rezultat nam bo prišel prav pri izračunu mešanih ščenov v x^2:

$$x^2 = \frac{x_0^2}{2}(a^2 + a^{+2} + a\, a^+ + a^+ a)$$

Po prejšnjem izračunu znamo izračunati $a^+ a$. Zato moramo člen $a\, a^+$ izraziti z $a^+ a$. Zvezo dobimo iz komutatorja, saj velja $[a, a^+] = a\, a^+ - a^+ a = 1 \rightarrow a\, a^+ = 1 + a^+ a$.
Tako za $< x^2 >$ dobimo:

$$< x^2 >= \frac{x_0^2}{2}[z^2 + z^{*2} + 2z^* z + 1] = \frac{x_0^2}{2}\left[(z^* + z)^2 + 1\right]$$

$$< x^2 >= \frac{x_0^2}{2}\left[(2\, Re(z))^2 + 1\right] \tag{10}$$

Enačbi (10) in (9) vstavimo v (8) in dobimo:

$$\delta x = \sqrt{\frac{x_0^2}{2}(4Re^2(z) + 1) - 2x_0^2\, Re^2(z)}$$

$$\underline{\delta x = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x_0} \tag{11}$$

3.2 Nedoločenost δp

Spomnimo se, kako se operator za p zapiše z a in a^+:

$$p = -i\frac{p_0}{\sqrt{2}}(a - a^+)$$

$$p^2 = -\frac{p_0^2}{2}(a^2 + a^{+2} - a\, a^+ + a^+ a)$$

S pomočjo gornjih enačb izračunamo $< p >$ in $< p^2 >$:

$$< p >= \langle z|\, p\, |z\rangle = -i\frac{p_0}{\sqrt{2}}\,\langle z|\, a - a^+\, |z\rangle = -i\frac{p_0}{\sqrt{2}}(z - z^*) = -i\frac{p_0}{\sqrt{2}}\, 2i\, Im(z)$$

$$< p >= \sqrt{2}\, p_0\, Im(z) \tag{12}$$

S podobnimi koraki kot $< x^2 >$ izračunamo še $< p^2 >$:

$$< p^2 >= \langle z|\, p^2\, |z\rangle = -\frac{p_0^2}{2}(z^2 + z^{*2} - 2z^* z - 1) = -\frac{p_0^2}{2}\left((z - z^*)^2 - 1\right)$$

$$< p^2 >= -\frac{p_0^2}{2}\left((2i\, Im(z))^2 - 1\right) \tag{13}$$

Enačbi (13) in (12) vstavimo v (8), tako da dobimo:

$$\delta p = \sqrt{-\frac{p_0^2}{2}\,((2i\, Im(z))^2 - 1) - 2p_0^2\, Im(z)}$$

$$\underline{\delta p = \frac{p_0}{\sqrt{2}}} \tag{14}$$

3.3 Produkt $\delta x\, \delta p$

Zmnožimo enačbi (11) in (14):

$$\delta x\, \delta p = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \frac{p_0}{\sqrt{2}}$$

Spomnimo se zveze $p_0 = \frac{\hbar}{x_0}$, tako da se zgornja enačba prepiše v:

$$\underline{\delta x\, \delta p = \frac{\hbar}{2}}$$