Kvantna mehanika 1 : domača naloga sipanje valovnega paketa

Andrej Košmrlj

4. april 2004

1 Naloga

Obravnavaj sipanje valovnega paketa na potencialu oblike

$$V(x) = V_0(\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2))$$

- če je amplituda prepustnosti približno konstantna na energijskem intervalu valovnega paketa
- če je v amplitudi prepustnosti ozka resonanca

2 Razvoj valovnega paketa po lastnih stanjih

Najprej zapišimo, kako se izraža valovna funkcija ψ v funkcijski obliki ob času $t = 0$:

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} e^{ik_0(x-x_0)},$$

kjer je x_0 pričakovana vrednost koordinate, k_0 sorazmerna z pričakovano vrednostjo gibalne količine $k_0 = p_0/\hbar$, ter σ nedoločenost koordinate x.

Brez dokaza bomo privzeli, da lahko valovni paket razvijemo samo po ravnih valovih, ki se gibljejo v desno.

$$\psi(x, 0) = \int \Phi(k) e^{ikx} dk.$$

To velja samo za $x < -a/2$, za $x > a/2$ pa moramo upoštevati, da se ravni val siplje na potencialu in moramo upoštevati samo prepuščeni del:

$$\psi(x, 0) = \int t(k) \Phi(k) e^{ikx} dk.$$

Na začetku imamo val dovolj, daleč na levi, da je del, kjer je treba upoštevati že popravljeno amplitudo zanemarljiv, zato lahko uporabimo kar inverzno Fourierovo transformacijo:

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}dx$$

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}}e^{i(k_0-k)(x-x_0)}e^{-ikx_0}dx$$

Sedaj si pomagamo z integralom:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2+bx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}},$$

kjer je $a = \frac{1}{4\sigma^2}$, $b = i(k_0 - k)$. Hkrati uvedemo še novo spremenljivko $u = x - x_0$, integriramo in dobimo:

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}\sqrt{\pi 4\sigma^2}e^{-\frac{(k-k_0)^2 4\sigma^2}{4}}e^{-ikx_0}$$

Izraz še malo polepšamo in dobimo:

$$\Phi(k) = e^{-ikx_0}\sqrt[4]{\frac{\sigma^2}{2\pi^3}}e^{-\sigma^2(k-k_0)^2}$$

3 Sipanje valovnega paketa

3.1 amplituda prepustnosti je približno konstantna na energijskem intervalu valovnega paketa

Zanimamo se samo za dovolj velike čase, ko bi bil praktično ves valovni paket, ki bi se prosto gibal že na desni strani potenciala. Ker imamo valovno funkcijo že razvito po lastnih funkcijah, je preprosto napraviti časovni razvoj.

$$\psi(x,t) = \int t(k)\Phi(k)e^{i\left(kx-\frac{k\hbar^2 t}{2m}\right)}dk$$

Glavni prispevki pridejo od k-jev, ki so blizu k_0, zato ne naredimo velike napake, če pod integralom $t(k)$ nadomestimo s $t(k_0)$.

$$\psi(x,0) \approx \int t(k_0)\Phi(k)e^{i\left(kx-\frac{k\hbar^2 t}{2m}\right)}dk$$

Sedaj lahko preprosto postavimo $t(k_0)$ pred integral in opazimo, da dobimo ravno z $t(k_0)$ pomnožen izraz, ki smo ga dobili za časovni razvoj prostega valovnega paketa. Od tod lahko tudi hitro ocenimo verjetnost, za prepustnost

$$\int_{0}^{\infty}\psi(x,t)^*\psi(x,t)dx \approx |t(k_0)|^2$$

3.2 v amplitudi prepustnosti je ozka resonanca

Kot smo se naučili pri eni od prejšnjih nalog, lahko prepustnost za tako resonanco zapišemo kot

$$t(k) = \frac{i\frac{\Gamma}{2}}{E(k) - E_0 + i\frac{\Gamma}{2}},$$

kjer je $E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, Γ pa je merilo za širino resonance. Tokrat bodo pomembni samo k-ji okrog k_0 ki ustreza E_0. Podobno kot prej bomo vse k-je nadomestili s k_0, razen eksponentne člene oblike $e^{ik\cdots}$, ki zelo hitro oscilirajo, zato bomo tam eksponente razvili okorg k_0, do prvega reda.

$$\psi(x,t) = \int |\Phi(k)| e^{-ikx_0} \frac{i\frac{\Gamma}{2}}{E(k) - E_0 + i\frac{\Gamma}{2}} e^{i\left(kx - \frac{E}{\hbar}t\right)} dk$$

Zapišimo $E = E_0 + \epsilon$, sedaj lahko razvijemo eksponent.

$$k(E)(x - x_0) - \frac{E}{\hbar}t = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}(x - x_0) - \frac{E}{\hbar}t$$

$$= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}(x - x_0) - \frac{E}{\hbar}t = (k_0 + \frac{m}{\hbar^2 k_0}\epsilon)(x - x_0) - \frac{E_0 + \epsilon}{\hbar}t$$

Uvedemo lahko tudi neko srednjo hitrost paketa na desni strani $v = \frac{k_0 \hbar}{m}$. Integral prevedemo iz integrala po k na integral po ϵ.

$$dk = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}} dE$$

Ko bomo integrirali, bomo E pod korenom nadomestili z E_0. Ko upoštevamo vse te približke dobimo

$$\psi(x,t) = |\Phi(E_0)| i \frac{\Gamma}{2\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E_0}} e^{i\left(k_0(x-x_0) - \frac{E_0}{\hbar}t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon + i\frac{\Gamma}{2}} e^{i\frac{\epsilon}{\hbar}\left(\frac{x-x_0}{v} - t\right)} d\epsilon$$

Ta integral uženemo s kompleksno integracijo. Pol imamo pri $\epsilon = -i\frac{\Gamma}{2}$. Glede na to kako moramo zaključiti zanko v kompleksni ravnini, da bo dovolj daleč stran vrednost podintegralske funkcije šla proti nič, pa ločimo dva primera.

- $x - x_0 < vt$; v tem primeru moramo zanko zaključiti po spodnji kompleksni polravnini, tako da objamemo pol. Če označimo vrednost intgrala z I in z f podintegralsko funkcijo, potem je

  $$I = -2\pi i \mathrm{Res}(f, -i\frac{\Gamma}{2})$$

$$I = -2\pi i e^{\frac{\Gamma}{2\hbar}\left(\frac{x-x_0}{v}-t\right)}$$

$-$ pred 2π pride zato, ker smo pol obkrožili enkrat v negativnem smislu. Za $x - x_0 < vt$ dobimo

$$\psi(x,t) = |\Phi(E_0)| \frac{\Gamma\pi}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E_0}} e^{\frac{\Gamma}{2\hbar}\left(\frac{x-x_0}{v}-t\right)} e^{i\left(k_0(x-x_0)-\frac{E_0}{\hbar}t\right)}$$

- $x - x_0 > vt$; v tem primeru moramo zanko zaključiti po zgornji kompleksni polravnini, tako da edinega pola sploh ne objamemo in je za to vrednost integrala enaka 0. Za $x - x_0 > vt$, torej dobimo $\psi(x,t) = 0$.

Kako si lahko razlagamo tak rezultat. Valovni paket, ki pada na delta funkciji, se zaradi resonance ujame v kvazivezano stanje med delta funkcijama in potem počasi uhaja iz tega kvazivezanega stanja.