KVANTNA MEHANIKA 1

Vrtilna kolièina III

NALOGA

Vodikov atom v stanju 2P je v lastnem stanju vrtilne kolièine L_x z lastno vrednostjo $\hbar$.
Ob t = 0 vkljuèimo homogeno magnetno polje v smeri z. Izraèunaj èasovno odvisnost prièakovane vrednosti operatorja $\hat{L}_x$. Vpliv spina elektrona in diamagnetni èlen v Hamiltonu lahko zanemarimo.

REŠITEV

Hamiltonov operator za vodikov atom v konstantnem magnetnem polju:

$$H = H_0 - \frac{e}{2m}\vec{L}\cdot\vec{B} = H_0 - \frac{m_B}{\hbar}\vec{L}\cdot\vec{B}, \quad \text{kjer } m_B = \frac{e\hbar}{2m} \text{ . . . Bohrov magneton.}$$

Magnetno polje kaže v smeri z $\vec{B} = (0,0,B_z)$, tako da je

$$H = H_0 - \frac{m_B}{\hbar}BL_z$$

Atom je v stanju 2P: n = 1,
l = 1,
m = -1, 0, 1.

Torej so lastne funkcije operatorja $\hat{L}_x$ $|-1\rangle$, $|0\rangle$ in $|1\rangle$.
Valovna funkcija za atom je linearna kombinacija teh lastnih funkcij:

$$|y\rangle = a|-1\rangle + b|0\rangle + g|1\rangle,$$

Velja: $\hat{L}_x|y\rangle = \hbar|y\rangle$.

Pogledamo kako deluje operator $\hat{L}_z$ na lastne funkcije:

$\hat{L}_z|-1\rangle = -\hbar|-1\rangle$

$\hat{L}_z|0\rangle = 0$

$\hat{L}_z|1\rangle = \hbar|1\rangle$

Sestavimo 2 nova operatorja: $L_\pm = L_x \pm L_y$ za katera velja da zvišujeta/znižujeta lastno vrednost za $\hbar$:

$$L_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}|l,m\pm 1\rangle,$$

l je konstanten, spreminja se le m. Torej:

$$L_+|-1\rangle = \sqrt{2}\hbar|0\rangle \qquad L_-|-1\rangle = 0\,,$$
$$L_+|0\rangle = \sqrt{2}\hbar|1\rangle \qquad L_-|0\rangle = \sqrt{2}\hbar|-1\rangle$$
$$L_+|1\rangle = 0 \qquad L_-|1\rangle = \sqrt{2}\hbar|0\rangle$$

Iz $L_\pm$ izrazimo L_x: $L_x = \dfrac{L_+ + L_-}{2}$

Delujemo z L_x na valovno funkcijo:

$$L_x|y\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|y\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)\left[a|-1\rangle + b|0\rangle + g|1\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[a\sqrt{2}\hbar|0\rangle + b\sqrt{2}\hbar|1\rangle + b\sqrt{2}\hbar|-1\rangle + g\sqrt{2}\hbar|0\rangle\right] =$$

$$= \hbar\left[\frac{b}{\sqrt{2}}|-1\rangle + \frac{a+g}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1\rangle\right] = \hbar|y\rangle = \hbar\left[a|-1\rangle + b|0\rangle + g|1\rangle\right]$$

Vidimo, da $a = g = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ $\qquad \Rightarrow \qquad |y\rangle = \dfrac{b}{\sqrt{2}}|-1\rangle + b|0\rangle + \dfrac{b}{\sqrt{2}}|1\rangle$

Z normalizacijo $|y\rangle$ izraèunamo še b :

$$\langle y|y\rangle = 1 = b^2\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = 2b^2 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = g = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow |y\rangle = \frac{1}{2}|-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$$

Èasovni razvoj valovne funkcije:

$$|y(t)\rangle = \frac{1}{2}|-1\rangle\exp\left(-i\frac{E_{-1}}{\hbar}t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\exp\left(-i\frac{E_0}{\hbar}t\right) + \frac{1}{2}|1\rangle\exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right)$$

Lastne energije $E_{m_l} = -\dfrac{W_R}{n^2} + \hbar w_L m_l$, kjer je $W_R = 13{,}6eV$ ...Rydbergova energija (vezavna energija vodikovega atoma v osnovnem stanju)

$w_L = m_B B$ ...Larmorjeva frekvenca

Sedaj lahko konèno izraèunamo prièakovano vrednost operatorja $\hat{L}_x$ (upoštevamo, da je energijska razlika med sosednjima nivojema enaka $\hbar w_L$:

$$\langle L_x\rangle = \frac{\langle L_+\rangle + \langle L_-\rangle}{2}$$

$$\langle L_+\rangle = \langle y|L_+|y\rangle = \ldots = \frac{\hbar}{2}\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_{-1})t\right] + \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_1)t\right]\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\exp[iw_L t] + \exp[iw_L t]\right) = \hbar \exp[iw_L t]$$

$$\langle L_- \rangle = \langle y \,| L_- | y \,\rangle = \ldots = \frac{\hbar}{2}\left(\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_{-1})t\right] + \exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_1)t\right]\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\exp[-iw_L t] + \exp[-iw_L t]\right) = \hbar \exp[-iw_L t]$$

$$\Rightarrow \langle L_x \rangle = \hbar \frac{\left(\exp[iw_L t] - \exp[-iw_L t]\right)}{2} = \hbar \cos(w_L t)$$