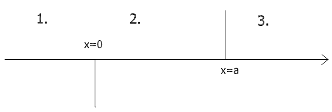
Kvantna mehanika (domača naloga)

Barbara Grobelnik

marec 2003

NALOGA:
Imamo potencial oblike

$$V(x) = -S\delta(x) + S\delta(x-a)$$



Slika 1: Potencial, razdeljen na območja.

Zapiši nastavek za valovno funkcijo vezanega stanja in robne pogoje. Izpelji enačbo, ki določa lastne energije vezanih stanj elektrona. Dokaži, da pri vsakem a obstaja vezano stanje. Določi energijo osnovnega stanja, ko gre a proti neskončno.

REŠITEV:
Zapišemo nastavke za posamezna področja (pri tem upoštevamo, da je $\Psi(x \to \infty) = 0$):

1. $\Psi_1(x) = B_1 e^{\lambda x}$
2. $\Psi_2(x) = A_2 e^{-\lambda x} + B_2 e^{\lambda x}$
3. $\Psi_3(x) = A_3 e^{-\lambda(x-a)}$

Z upoštevanjem robnih pogojev: Ψ je zvezna na mejah območij (pri $x = 0$ in pri $x = a$) ter enačbe za skoke odvodov, ki smo jo izpeljali pri prejšnji nalogi ($\Psi'(x_D) - \Psi'(x_L) = \mp 2q\Psi(x)$, kjer $q = \frac{Sm}{\hbar^2}$), dobimo štiri enačbe za neznane koeficiente.

$$A_1 = A_2 + B_2 \tag{1}$$

$$A_2 e^{\lambda a} + B_2 e^{-\lambda a} = B_3 \tag{2}$$
$$A_2 \lambda - B_2 \lambda - A_1 \lambda = -2qA_1 \tag{3}$$
$$-B_3 \lambda - A_2 \lambda e^{\lambda a} + B_2 \lambda e^{-\lambda a} = 2qB_3 \tag{4}$$

Enačbi (1) in (3)
$A_2 + B_2 = A_1$ in $A_2 - B_2 = A_1 \frac{-2q+\lambda}{\lambda}$
seštejemo in odštejemo ter dobimo:
$2A_2 = A_1(1 + \frac{-2q+\lambda}{\lambda}) = A_1 2 \frac{\lambda - q}{\lambda}$

$$\Rightarrow A_2 = A_1 \frac{\lambda - q}{\lambda} \tag{5}$$

$2B_2 = A_1(1 - \frac{-2q+\lambda}{\lambda}) = A_1 2 \frac{q}{\lambda}$

$$\Rightarrow B_2 = A_1 \frac{q}{\lambda} \tag{6}$$

Podobno naredimo z enačbama (2) in (4)
$A_2 e^{\lambda a} + B_2 e^{-\lambda a} = B_3$ in $-A_2 e^{\lambda a} + B_2 e^{-\lambda a} = B_3 \frac{2q+\lambda}{\lambda}$:
$2B_2 e^{-\lambda a} = B_3(1 + \frac{2q+\lambda}{\lambda})$

$$\Rightarrow B_2 e^{-\lambda a} = B_3 \frac{\lambda + q}{\lambda} \tag{7}$$

$2A_2 e^{\lambda a} = B_3(1 - \frac{2q+\lambda}{\lambda})$

$$\Rightarrow A_2 e^{\lambda a} = B_3 \frac{-q}{\lambda} \tag{8}$$

Delimo enačbi (5) in (6) (oz. (8) in (7)), da dobimo razmerji $\frac{A_2}{B_2}$, ki ju izenačimo: $\frac{\lambda - q}{q} = \frac{-q}{\lambda + q} e^{-2\lambda a}$ in končno

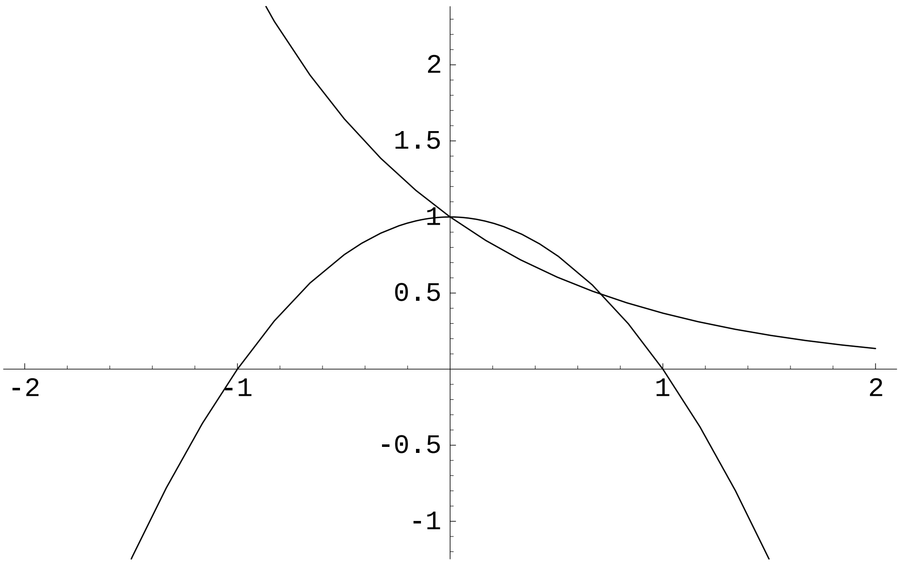
$$1 - \frac{\lambda^2}{q^2} = e^{-2\lambda a} \tag{9}$$

Za energijo velja enačba $\lambda = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V - E)}$; v našem primeru je potencial enak nič in dobimo $E = -\frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m}$.

Če narišemo grafa funkcij $1 - \frac{\lambda^2}{q^2}$ in $e^{-2\lambda a}$, vidimo, da vedno obstaja presečišče, saj velja

$$(e^{-2\lambda a})' \leq 1 - \frac{\lambda^2}{q^2}$$

pri $\lambda = 0$ za vsak a.



Slika 2: Funkciji $1 - \frac{\lambda^2}{q^2}$ in $e^{-2\lambda a}$

V enačbi (9) pošljemo $a \to \infty$. Rešitev enačbe $1 - \frac{\lambda^2}{q^2} = 1$ je $\lambda = q$ (ker je $\lambda \geq 0$) in za energijo dobimo izraz $E = -\frac{s^2 m}{2\hbar^2}$, kar je isto, kot če bi imeli le eno navzdol obrnjeno delta funkcijo.