Kvantna mehanika
Sipanje 3D II

Matej Kanduč

2. september 2003

1 Naloga

Delec se sipa na potencialu $V(r) = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{1}{\cosh^2\frac{r}{a}}$

1. Pokaži, da so valovne funkcije $\psi(r) = \frac{e^{\pm ikr}}{r}\big(\tanh\frac{r}{a} \mp ika\big)$ lastne funkcije sistema.
2. Izračunaj prispevek kanala s k celotnemu sipalnemu preseku.

2 Rešitev

2.1 Lastne funkcije

Lastne funkcije sistema morajo ustrezati stacionarni Schrodingerjevi enačbi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = E\psi \tag{1}$$

Vstavimo funkcijo ψ v to enačbo in upoštevamo naslednjo relacijo v sferičnih koordinatah:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{a}e^{\pm ikr}\Big(r\frac{1}{\cosh^2\frac{r}{a}} + a(kr \pm i)(ak \pm i\tanh\frac{r}{a})\Big)\right)$$

$$= \frac{i}{a^2}e^{\pm ikr}r^3\big(a^2k^2 + \frac{2}{\cosh^2\frac{r}{a}}\big)\big(ak \mp i\tanh\frac{r}{a}\big)$$

To vstavimo v en.(1) in končno dobimo rezultat:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\frac{e^{\pm ikx}}{r}\big(\tanh\frac{r}{a} \mp ika\big) \tag{3}$$

Torej, smo dokazali, da so funkcije, lastne funkcije sistema, z lastno vrednostjo $E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$.

2.2 Sipalni presek

Za sipanje na majhni motnji velja:

$$\psi_k(\vec{r}) = e^{ikr\cos\vartheta} + \frac{e^{ikr}}{r}f_k(\vartheta,\varphi) \tag{4}$$

Ker je naš potencial sferično simetričen, lahko sipano funkcijo razvijemo po lastnih radialnih in krogelnih funkcijah:

$$\psi_k(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)R_l(r)P_l(\cos\vartheta) \tag{5}$$

Za velike vrednosti r, se funkcija $R_l(r)$ obnaša kot:

$$R_l(r) = B_l\big(h_l^{(2)}(kr) + S_l(E)h_l^{(1)}(kr)\big) \tag{6}$$

kjer je

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)} \tag{7}$$

Diferencialni sipalni presek je definiran kot:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\Omega)}{N_{in}d\Omega}$$

Za majhne energije velja:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2\delta_0}{k^2} \tag{8}$$

se pravi, moramo izračunati samo še fazni zamik δ_0.

Imamo dve lastni funkciji (+ in −), ki ustrezata isti energiji. Sestaviti je potrebno linearno kombinacijo obeh, tako da bo zadoščeno robnemu pogoju pri $r = 0$, kjer funkcija ne sme divergirati.

$$\Psi(r) = \alpha\psi_1(r) + \beta\psi_2(r) \tag{9}$$

$$= \alpha\frac{e^{ikr}}{r}\big(\tanh\frac{r}{a} - ika\big) + \beta\frac{e^{-ikr}}{r}\big(\tanh\frac{r}{a} + ika\big)$$

$$= \big(\alpha e^{ikr} + \beta e^{-ikr}\big)\frac{\tanh\frac{r}{a}}{r} - \big(\alpha e^{ikr} - \beta e^{-ikr}\big)\frac{ika}{r}$$

Drugi člen bo konvergiral za $r \to 0$, le če je $\alpha = \beta$. V tem primeru namreč za drugi člen dobimo:

$$ka\alpha\frac{\sin kr}{r}$$

ki konvergira.

Sedaj želimo iz linearne kombinacije dobiti izraz podoben en.(6). V ta namen uporabimo sledeči relaciji za Hanklovi funkciji:

$$h_0^{(1)}(kr) = \frac{e^{ikr}}{ikr} \qquad h_0^{(2)}(kr) = -\frac{e^{-ikr}}{ikr}$$

Dobimo:

$$\psi_1(r) = ikh_0^{(1)}(kr)\big(\tanh\frac{r}{a} - ika\big) \sim ikh_0^{(1)}(kr)\big(1 - ika\big)$$

$$\psi_2(r) = -ikh_0^{(2)}(kr)\big(\tanh\frac{r}{a} + ika\big) \sim -ikh_0^{(2)}(kr)\big(1 + ika\big)$$

Pri tem za velike r upoštevamo, da je $\tanh\frac{r}{a} \approx 1$.

Tako izraženi funkciji vstavimo v en.(9) in dobimo:

$$\Psi = \alpha ik\Big[h_0^{(1)}(kr)(1 - ika) - h_0^{(2)}(kr)(1 + ika)\Big]$$

$$= -\frac{\alpha ik}{1 + ika}\Big[h_0^{(2)}(kr) - \frac{1 - ika}{1 + ika}h_0^{(1)}(kr)\Big]$$

To je seveda razvoj le do najnižjega reda ($l = 0$), ki je dober za nizke energije.

Iz tega izraza sedaj razberemo δ_0:

$$e^{2i\delta_0} = -\frac{1 - ika}{1 + ika} = -\frac{1 - k^2a^2 - 2ika}{1 + k^2a^2}$$

Iz tega lahko razberemo

$$\cos 2\delta_0 = -\frac{1 - k^2 a^2}{1 + k^2 a^2}$$

Nato izrazimo $\sin^2 \delta_0$:

$$\sin^2 \delta_0 = \frac{1 - \cos 2\delta_0}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1 - k^2 a^2}{1 + k^2 a^2}\right) = \frac{1}{1 + k^2 a^2}$$

Sedaj lahko končno izračunamo sipalni presek. Dobljeni rezultat vstavimo v en.(8):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + k^2 a^2}$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2(1 + k^2 a^2)}$$

Vidimo, da višja kot je energija, manjši je sipalni presek.