Domača naloga: Perturbacija IV

1 Naloga

Izračunaj popravek energije osnovnega stanja atoma z vrstnim številom Z in enim samim elektronom zaradi končne velikosti jedra. Predpostavi, da je (a) naboj jedra enakomerno razporejen po celotni prostornini jedra in (b), da je naboj samo na površini jedra.

2 Preračun

2.1 Naboj je enakomerno porazdeljen po prostornini jedra

Iz Gaussovega zakona o električnem pretoku izračunam obliko potencialnega polja:

$$\varepsilon_0 \oiint \vec{E} d\vec{S} = e_{(r)}$$

S ploskvico zaobjet naboj:

$$e_{(r)} = Ze\frac{r^3}{r_0^3}$$

Enačbi združim:

$$\varepsilon_0 \oiint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi\varepsilon_0 E r^2 = Ze\frac{r^3}{r_0^r} \rightarrow E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} \cdot r$$

Iz jakosti električnega polja izračunam potencial električnega polja:

$$\varphi_{(r)} = -\int_{\infty}^{r} E dr = -\int_{\infty}^{r_0} \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} - \int_{r_0}^{r} \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} r dr = \frac{Ze}{8\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

Potencialna energija znotraj jedra:

$$V_{(r)} = -\varphi_{(r)} e = \frac{Ze}{8\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 3\right)$$

Zapišem Hamiltonijan:

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{H_0} + \underbrace{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left(\frac{r^2}{r_0^2} - 3\right)}_{H'}$$

Popravek osnovnega stanja:

$$E_0^1 = \langle 100|H'|100\rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta \int_0^{r_0} R_{10}^* Y_{00}^* H' R_{10} Y_{10} r^2 dr$$

Kjer sta:

$$R_{10} = 2\left(\frac{Z}{r_B}\right)^{3/2} e^{-Z\frac{r}{r_B}} \text{ in } Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

Ker je $r_0 \ll r_B$ lahko pišem: $R_{10} \cong 2\left(\frac{Z}{r_B}\right)^{3/2}$

Še malo računanja in dobim popravek osnovnega energijskega stanja:

$$E_0^1 = \frac{Z^4 e^2}{\pi\varepsilon_0 r_B^3}\int_0^{r_0}\left(r + \frac{r^4}{2r_0^3} - \frac{3}{2}r^2\right)dr = \underline{\frac{Z^4 e^2}{10\pi\varepsilon_0 r_B}\left(\frac{r_0}{r_B}\right)^2}$$

2.2 Naboj je na površini jedra

Potencial električnega polja je znotraj krogle konstanten.

$$\varphi_{(r)} = \begin{cases} \dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}; r \geq r_0 \\ \dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r_0}; r < r_0 \end{cases}$$

Potencialna energija znotraj jedra:

$$V_{(r)} = -e\varphi_{(r)} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

Hamiltonijan:

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{H_0} + \underbrace{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}}_{H'}$$

Popravek osnovnega stanja:

$$E_0^1 = \langle 100 | H' | 100 \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta \int_0^{r_0} R_{10}^* Y_{00}^* H' R_{10} Y_{10} r^2 dr$$

Uporabim isti približek kot v prvem primeru:

$$E_0^1 = \frac{Z^4 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_B^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta \int_0^{r_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) r^2 dr = \underbrace{\frac{Z^4 e^2}{6\pi\varepsilon_0 r_B} \cdot \left(\frac{r_0}{r_B} \right)^2}$$