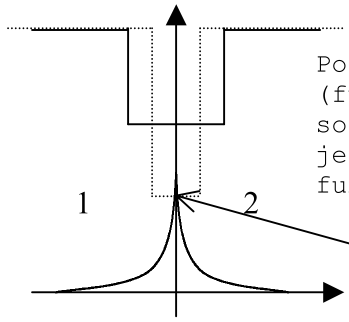
Delta potencial I

Naloga : Obravnavali smo osnovno stanje delca v potencialu :

$$V(x) = -S\delta(x).$$

1. Najprej smo izpeljali robne pogoje za valovno funkcijo pri x = 0.
2. Poiskali smo energijo in valovno funkcijo osnovnega stanja.
3. Nazadnje pa nas je zanimal še produkt nedoločenosti lege ter gibalne količine za elektron v osnovnem stanju(oz. če izpolnjuje načelo nedoločenosti: $\boxed{\delta x \delta p \geq \hbar/2}$).



Potencial je zvezno simetričen (funkcija je tako ali liha ali soda), v tem primeru se izkaže, da je samo ena rešitev in sicer, da je funkcija soda.

Naloga se navezuje na nalogo, ki smo jo reševali, kjer je bil zmnožek $2aV_0$ = konst.= S in $V_0 \to \infty$, kjer je a širina potencialne jame, V_0 pa »višina« potencialnega skoka. V nalogi smo namreč ugotovili, da je rešitev le ena in sicer soda.
Najprej iz Shrödingerjeve enačbe izpeljemo 2.robni pogoj (še vedno namreč mora veljati, da je ψ zvezna):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (-S\delta(x))\psi = E\psi$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx: \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx - S\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\psi dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}E\psi dx$$

zdaj pa pošljemo $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}: \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|_{x=\varepsilon} - \left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|_{x=-\varepsilon}\right] - S\delta(0) = 0\,,$$

tako je 2. robni pogoj:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(0_+) - \psi'(0_-)\right] - S\delta(0) = 0\,,$$

kjer je $\psi(0_+)$ odvod z desne $\psi(0_-)$ pa z leve(tak zapis smo uporabili, ker odvod v x = 0 ni zvezen, saj imamo v potencialu delta funkcijo).

Nastavka za valovno funkcijo (E < V za vezana stanja):
1. x < 0 : $\psi = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$ $\Rightarrow$ $Ae^{\lambda x}$, ko x → ∞ gre $\psi \to 0$: B = 0,
2. x > 0 : $\psi = Ce^{\lambda x} + De^{-\lambda x}$ $\Rightarrow$ $De^{-\lambda x}$, ko x → ∞ gre $\psi \to 0$: C = 0;

Iz zveznosti val. funkcije v x = 0 (1.robni pogoj) dobimo :
<u>A = D</u>;

Iz 2. robnega pogoja pa :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-\lambda D\cancelto{1}{e^{-\lambda 0}} - \lambda D\cancelto{1}{e^{\lambda 0}}) - SD\cancelto{1}{e^{\lambda 0}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{Sm}{\hbar^2}$$

- *Valovna funkcija* je tako oblike (ker smo zlepili rešitvi za 1. in 2. območje smo vzeli absolutno vrednost x –a v eksponentu):

$$\psi = \sqrt{\lambda} e^{-|x|\lambda} \; ,$$

  kjer se D(= $\sqrt{\frac{Sm}{\hbar^2}}$ = $\sqrt{\lambda}$) dobi z normalizacijo.

- *Energijo* pa dobimo iz enačbe :

$$\lambda = \sqrt{\tfrac{2m}{\hbar^2}(V - E)}$$

$$\Rightarrow E = V - \frac{\lambda^2\hbar^2}{2m} = V - \frac{m^2 S}{2\hbar^2}$$

Zdaj pa nas je zanimal še *produkt nedoločenosti lege ter gibalne količine za elektron v osnovnem stanju*(<u>$\delta x\delta p$</u>):

za nedoločenost lege velja: $\delta x = \sqrt{<x^2> - <x>^2}$,

za nedoločenost gibalne količine velja: $\delta p = \sqrt{<p^2> - <p>^2}$.

Če želimo izračunati zgornje, pa moramo vedeti, kako se pride do posameznih členov. Tako npr. za povprečno lego zapišemo: $<x> = \int \psi^* x \psi dx$, med tem ko rabimo za izračun povprečne gibalne integral: $<p> = \int \psi^* p \psi dx$, kjer je $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$.

Najprej smo si pogledali nedoločenost lege:

$$<x> = \int \psi^* x \psi dx = \int q e^{-2q|x|} x dx = 0 \qquad q = \frac{Sm}{\hbar^2} \Rightarrow \sqrt{<x^2>} = \delta x$$

Ničlo dobimo, ker imamo integral od -∞ do ∞ in je funkcija v integralu liha, kar nam prinese ničlo.

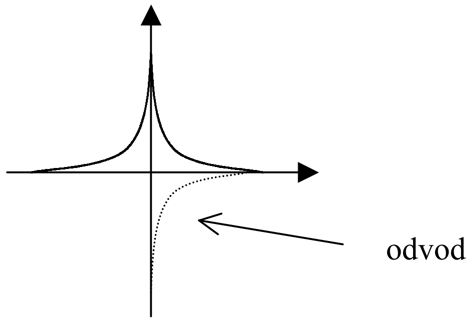
$$< x^2 >= \int \psi^* x^2 \psi dx = \int q e^{-2q|x|} x^2 dx = 2\int_0^\infty q e^{-2qx} x^2 dx \qquad u = 2qx, du = 2qdx \Rightarrow \frac{\cancel{2q}}{(2q)^2 \cancel{2q}} \int_0^\infty e^{-u} u^2 du$$

Ker je integral : $\int_0^\infty e^{-u} u^2 du = \Gamma(3) = 2! = 2$,

dobimo, da je: $< x^2 >= \dfrac{1}{2q^2} \Rightarrow \delta x = \dfrac{1}{q\sqrt{2}}$.

Nazadnje pa smo pogledali še nedoločenost gibalne količine:

$$< p >= \int \underset{\text{sod}}{\psi^*} (-i\hbar) \underset{\text{liha}}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} dx = 0$$



Torej je podobno kot za lego : $\delta p = \sqrt{< p^2 >}$; Tu pa se pri $<p^2>$ pojavi še en problem, saj 1. odvod ni zvezen. V našem integralu pa se pojavi drugi odvod po x, ki ga zlepimo za 1.,2. območje z delta funkcijo, ki pomaga »poravnati« skok:

$$x \le 0 : \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sqrt{q} q^2 e^{qx} = q^{5/2} e^{qx}$$

$$x \ge 0 : \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sqrt{q} q^2 e^{-qx} = q^{5/2} e^{-qx}$$

$x = 0 : \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -a\delta(x) = -2q^{3/2}\delta(x)$ (oz. za vse x-e, vendar pri x = 0 dobimo »prispevek«)

Tako dobljen drugi odvod je: $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = q^{5/2} e^{-q|x|} - 2q^{3/2}\delta(x)$ in iz tega lahko izračunamo :

$$< p^2 >= \int \psi^* p^2 \psi dx = -\hbar^2 q^{1/2} \int \left[q^{5/2} e^{-q|x|} - 2q^{3/2}\delta(x) \right] e^{-q|x|} dx = -\hbar^2 q^2 \left[\int q e^{-2q|x|} dx - \int 2\delta(x) e^{-q|x|} dx \right] =$$

$$= -\hbar^2 q^2 \left[2\int_0^\infty q e^{-2qx} dx - 2e^0 \right] = -\hbar^2 q^2 \left[-(0-1) - 2 \right] = \hbar^2 q^2 ,$$

torej je : $< p^2 >= q^2 \hbar^2 \Rightarrow \delta p = q\hbar$.

Tako smo dobili, da je : dxdp = Ñ/ $\sqrt{2}$ > Ñ/2.