Elektron v homogenem magnetnem polju s kratkim pulzom magnetnega polja v pravokotni smeri

Jure Kokalj

9. junij 2003

1 Naloga

Elektron v homogenem magnetnem polju je v osnovnem stanju (zanimamo se samo za spinski del elektronove valovne funkcije). Obravnavaj časovni razvoj sistema, če na elektron deluje kratek pulz magnetnega polja na stalno magnetno polje $\mathbf{B(t)} = (\tilde{B}_x\delta(t), 0, B_z)$

2 Rešitev

Zanimala nas bo verjetnost, da se elektron po sunku magnetnega polja nahaja v vzbujenem stanju.
Najprej si poglejmo rešitve za homogeno magnetno polje v z smeri. Ker je naboj elektrona negativen, kaže magnetni moment v obratno smer kot spin elektrona. Torej je osnovo stanje, ko magnetno polje kaže v z smeri spin pa je obrnjen navzdol.
Energije:

$$W = -\boldsymbol{\mu}.\mathbf{B} = -\mu_z B_z = g\frac{\mu_B}{\hbar}s_z B_z \qquad g = 2 \qquad s_z = \pm 1/2$$

$$W_\uparrow = \frac{\mu_B B_z}{\hbar}$$

$$W_\downarrow = -\frac{\mu_B B_z}{\hbar}$$

Sedaj lahko zapišemo kakšne oblike bo naša valovna funkcija ob nekem času.
$W = \hbar\omega$

$$|\Psi, t\rangle = A(t)|\uparrow\rangle e^{-i\omega t} + B(t)|\downarrow\rangle e^{i\omega t}$$

Poglejmo sedaj kako izračunamo valovne funkcije, če imamo časovno odvisen potencial $H = H_0 + V(t)$. Rešitev za hamiltonian H_0 je linearna kobinacija njegovih lastnih funkcij $\quad |\Psi\rangle = \sum_n C_n|n\rangle_0$
Za časovno odvisen hamiltonian pa dobimo rešitev z nastavkom $|\Psi, t\rangle = \sum_n C_n(t)|n, t\rangle_0$

Torej:

$$H|\Psi,t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi,t\rangle$$

$$H|\Psi,t\rangle = \sum_n C_n(t)W_n|n,t\rangle_0 + \sum_n V(t)C_n(t)|n,t\rangle_0$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi,t\rangle = i\hbar(\sum_n \dot{C}_n(t)|n,t\rangle_0 + C_n(t)(-i\frac{W_n}{\hbar}|n,t\rangle_0))$$

Vidimo, da se dva člena pokrajšata. Ko celoten izraz pomnožimo z $\langle_0 m,t|$ dobimo:

$$\sum_n C_n(t)\langle_0 m,t|V(t)|n,t\rangle_0 = i\hbar\delta_{mn}\dot{C_m}(t)$$

S tem smo dobili sistem diferencialnih enačb za izračun koeficinetov $C_n(t)$. Časovno odvisen potencial je v tej nalogi $V(t) = g\frac{\mu_B}{\hbar}\hat{s_x}B_x(t)$. V sistemu pa nasopajo členi:
$\langle\uparrow,t|V(t)|\uparrow,t\rangle$
$\langle\uparrow,t|V(t)|\downarrow,t\rangle$
$\langle\downarrow,t|V(t)|\uparrow,t\rangle$
$\langle\downarrow,t|V(t)|\downarrow,t\rangle$

Naš operator $\hat{s_x}$ izrazimo z operatorjema s_- in s_+.

$$s_\pm = s_x \pm is_y$$

$$s_x = \frac{s_+ + s_-}{2}$$

Upoštevamo enačbe za izračun:

$$s_\pm|m_s,t\rangle = s_\pm|m_s\rangle e^{-i\frac{W_{m_s}}{\hbar}t}$$

$$s_\pm|m_s,t\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s\pm 1)} \quad |m_s \pm 1\rangle e^{-i\frac{W_{m_s}}{\hbar}t}$$

Sedaj lahko izračunamo naše člene:

$$s_+|\uparrow,t\rangle = \hbar\sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2+1)} \quad |3/2\rangle e^{i\omega t} = 0$$

$$s_+|\downarrow,t\rangle = \hbar\sqrt{1/2(1/2+1) - (-1/2)(-1/2+1)} \quad |\uparrow\rangle e^{-i\omega t} = \hbar|\uparrow\rangle e^{-i\omega t}$$

$$s_-|\uparrow,t\rangle = \hbar\sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2-1)} \quad |\downarrow\rangle e^{i\omega t} = \hbar|\downarrow\rangle e^{i\omega t}$$

$$s_-|\downarrow,t\rangle = \hbar\sqrt{1/2(1/2+1) - (-1/2)(-1/2-1)} \quad |-3/2\rangle e^{-i\omega t} = 0$$

Ko upoštevamo te izračune in ortogonalnost funkcij $\langle\uparrow,t|\downarrow,t\rangle = 0$ dobimo člene:
$\langle\uparrow,t|V(t)|\uparrow,t\rangle$ =0
$\langle\uparrow,t|V(t)|\downarrow,t\rangle = \frac{2\mu_B}{2\hbar}\hbar B_x\langle\uparrow,t|\uparrow,t\rangle e^{2i\omega t}$
$\langle\downarrow,t|V(t)|\uparrow,t\rangle = \mu_B B_x\langle\downarrow,t|\downarrow,t\rangle e^{-2i\omega t}$
$\langle\downarrow,t|V(t)|\downarrow,t\rangle$=0

Upoštevamo $B_x = \tilde{B}_x\delta(t)$ in dobimo sistem:

$$B(t)\mu_B\tilde{B}_x\delta(t)e^{2i\omega t} = i\hbar\dot{A}(t)$$

$$A(t)\mu_B \tilde{B}_x \delta(t) e^{-2i\omega t} = i\hbar \dot{B}(t)$$

Za čase, ki so manjši ali večji od nič je enačbama zadoščeno, če sta A in B konstantna. Ker je pri časih $t < 0$ sistem v osnovnem stanju velja:
$t < 0 \qquad A(t) = 0 \qquad B(t) = 1$
$t > 0 \qquad A(t) = A_0 \qquad B(t) = B_0$
Ker želimo izvedeti, kaj se zgodi ob $t = 0$ pa obe enačbi integriramo po času $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dt$. Upoštevamo še da je $\int \delta(t)A(t)dt = \frac{A(t>0)+A(t<0)}{2}$ in dobimo:

$$\frac{B_0 + 1}{2}\mu_B \tilde{B}_x e^0 = i\hbar A_0$$

$$\frac{A_0}{2}\mu_B \tilde{B}_x e^0 = i\hbar (B_0 - 1)$$

Vpeljemo nov parameter $\alpha = \frac{\mu_B \tilde{B}_x}{2\hbar}$ in rešimo sistem pa dobimo:
$B_0 = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2+1}$
$A_0 = -\frac{i2\alpha}{\alpha^2+1}$

Torej je rešitev:

$$|\Psi, t\rangle = -\frac{i2\alpha}{\alpha^2+1}| \uparrow, t\rangle + \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2+1}| \downarrow, t\rangle$$