Naloga: Gledamo sipanje delca s spinom **S** na delcu s spinom $\mathbf{S}_0$. To naredimo tako. Da potencial V(x) = -Q δ(x) dopolnimo s potencialom delcev s spinom, od katerih je en fiksno v x = 0, za drugega pa želimo dobiti vezana stanja. Tako dobimo potencial $V(x) = -Q\,\delta(x)\,\mathbf{S}_0\cdot\mathbf{S}$, kjer je $\mathbf{S}_0 = 3/2$ spin fiksnega delca, $\mathbf{S} = 1$ pa sipanega.

Ker za potencial V(x) = -Q δ(x) že poznamo rešitve, se najprej posvetimo spinskemu delu.

Če za oba delca zapišemo produktno bazo za valovno funkcijo dobimo: $|S_0\, S_0z\rangle\, |S\, Sz\rangle$ torej celotna baza je:

$\|3/2\ 3/2\rangle\|1\ \ 1\rangle$	$\|3/2\ \ 1/2\rangle\|1\ \ 1\rangle$	$\|3/2\ \ -1/2\rangle\|1\ \ 1\rangle$	$\|3/2\ \ -3/2\rangle\|1\ \ 1\rangle$
$\|3/2\ 3/2\rangle\|1\ \ 0\rangle$	$\|3/2\ \ 1/2\rangle\|1\ \ 0\rangle$	$\|3/2\ \ -1/2\rangle\|1\ \ 0\rangle$	$\|3/2\ \ -3/2\rangle\|1\ \ 0\rangle$
$\|3/2\ 3/2\rangle\|1\ -1\rangle$	$\|3/2\ \ 1/2\rangle\|1\ -1\rangle$	$\|3/2\ \ -1/2\rangle\|1\ -1\rangle$	$\|3/2\ \ -3/2\rangle\|1\ -1\rangle$

Izkaže se, da je ta baza za nadaljnjo računaje neprimerna, zato uporabimo drugačno bazo. Najprej uvedemo skupno vrtilno količino $\mathbf{J} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}$.

Torej lahko zapišemo: $J^2 = S_0^2 + S^2 + \mathbf{S}_0\cdot\mathbf{S} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}_0 = S_0^2 + S^2 + 2\,\mathbf{S}_0\cdot\mathbf{S}$,
ker S_0 in S komutirata.

Iz tega sledi: $\mathbf{S}_0\cdot\mathbf{S} = 1/2\,(J^2 - S_0^2 - S^2)$ in še $|S_0 - S| \le J \le |S_0 + S|$

Sedaj lahko zapišemo novo bazo: $|S_0\ S\ \ J\ \ Jz\rangle$

$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ \ 5/2\rangle$	$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ \ 3/2\rangle$	$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ \ 1/2\rangle$
$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ \ 3/2\rangle$	$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ \ 1/2\rangle$	$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ -1/2\rangle$
$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ \ 1/2\rangle$	$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ -1/2\rangle$	
$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ -1/2\rangle$	$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ -3/2\rangle$	
$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ -3/2\rangle$		
$\|3/2\ \ 1\ \ 5/2\ \ -5/2\rangle$		

V obeh primerih imamo 12 različnih stanj.

Prednost nove baze je v tem, da se znebimo vektorskega operatorja $\mathbf{S}_0\cdot\mathbf{S}$, namesto katerega lahko uporabimo že poznane operatorje L^2, za katere vemo kako delujejo. Torej:

$V(x) = -Q\,\delta(x)\,\mathbf{S}_0\cdot\mathbf{S} = -Q\,\delta(x)\,1/2\,(J^2 - S_0^2 - S^2)$ vemo pa $L^2\,|\,l\ m\rangle = \hbar^2\, l(l+1)\,|\,l\ m\rangle$

Naš operator je torej:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_0\cdot\mathbf{S}\,|S_0\ S\ \ J\ \ Jz\rangle &= 1/2\,[\,J^2\,|S_0\ S\ \ J\ \ Jz\rangle - S_0^2\,|S_0\ S\ \ J\ \ Jz\rangle - S^2\,|S_0\ S\ \ J\ \ Jz\rangle\,] = \\ &= 1/2\,[\,\hbar^2 J(J+1)\,|\ldots\rangle - \hbar^2 S_0(S_0+1)\,|\ldots\rangle - \hbar^2 S(S+1)\,|\ldots\rangle = \\ &= \hbar^2/2\,[\,J(J+1) + S_0(S_0+1) + S(S+1)\,]\,|S_0\ S\ \ J\ \ Jz\rangle\end{aligned}$$

torej je $|S_0\ S\ \ J\ \ Jz\rangle$ lastna funkcija za operator $\mathbf{S}_0\cdot\mathbf{S}$.

Tako dobimo le tri različne rezultate za naš operator, ki so podani z velikostjo skupne vrtilne količine J, saj sta velikosti S in S_0 fiksni.

Za J = 5/2: $$\begin{aligned}\mathbf{S}_0\cdot\mathbf{S}\,|3/2\ 1\ 5/2\ \ Jz\rangle &= \hbar^2/2\,[5/2\,(5/2+1) + 3/2\,(3/2+1) + 1\,(1+1)]\,|\ldots\rangle = \\ &= 3/2\,\hbar^2\,|3/2\ 1\ 5/2\ \ Jz\rangle = 3/2\,\hbar^2\,|S_0\ S\ \ 5/2\ \ Jz\rangle\end{aligned}$$

Za $J = 3/2$: $\mathbf{S_0} \cdot \mathbf{S} \,|S_0 \;\; S \;\; 3/2 \;\; Jz> \; = \; \hbar^2 \,|S_0 \;\; S \;\; 3/2 \;\; Jz>$

Za $J = 1/2$: $\mathbf{S_0} \cdot \mathbf{S} \,|S_0 \;\; S \;\; 1/2 \;\; Jz> \; = \; -5/2 \, \hbar^2 \,|S_0 \;\; S \;\; 3/2 \;\; Jz>$

Sedaj lahko zapišemo potenciale, ki so prav tako odvisni od velikosti J:

Za $J = 5/2$: $V(x) = -Q\,\delta(x)\,\mathbf{S_0} \cdot \mathbf{S}\,(J = 5/2) = -3/2\,\hbar^2\,Q\,\delta(x)$

Za $J = 3/2$: $V(x) = \hbar^2\,Q\,\delta(x)$

Za $J = 1/2$: $V(x) = 5/2\,\hbar^2\,Q\,\delta(x)$

Ker vemo, da potencial $V(x) = A\,\delta(x)$, $A > 0$ ne more imeti vezanih stanj, so torej edina možna vezana stanja, tista s $J = 5/2$. Dobili smo torej 6 možnih vezanih stanj z isto energijo, ki se razlikujejo po projekciji skupne vrtilne količine Jz.

Za nespinski del naše funkcije dobimo iz Schrödingerjeve enačbe rešitev oblike:

$\Psi(x) = A\,e^{+kx} + B\,e^{-kx}$, za $x < 0$ in $\Psi(x) = C\,e^{+kx} + D\,e^{-kx}$, za $x > 0$

Naše rešitve morajo zadoščati pogojem
1.) $-\hbar^2/2m\,[\,\Psi'(0+) - \Psi'(0-)\,] - 3/2\,\hbar^2\,Q\,\Psi(0) = 0$
2.) Ψ je zvezna
3.) $\Psi(+\infty) = \Psi(-\infty) = 0$
4.) Ψ mora biti soda, zaradi simetrije

Iz robnih pogojev sledi:
3.) $\rightarrow B = 0,\ C = 0$
4.) $\rightarrow A = D$
1.) $\rightarrow k = -3/2\,m\,Q$

Naše rešitve so potem take:

$\Psi_1(x) = A\,e^{-3/2\,m\,Q\,|x|}\,|3/2 \;\; 1 \;\; 5/2 \;\; 5/2>$
$\Psi_2(x) = A\,e^{-3/2\,m\,Q\,|x|}\,|3/2 \;\; 1 \;\; 5/2 \;\; 3/2>$
$\Psi_3(x) = A\,e^{-3/2\,m\,Q\,|x|}\,|3/2 \;\; 1 \;\; 5/2 \;\; 1/2>$
$\Psi_4(x) = A\,e^{-3/2\,m\,Q\,|x|}\,|3/2 \;\; 1 \;\; 5/2 \;\; -1/2>$
$\Psi_5(x) = A\,e^{-3/2\,m\,Q\,|x|}\,|3/2 \;\; 1 \;\; 5/2 \;\; -3/2>$
$\Psi_6(x) = A\,e^{-3/2\,m\,Q\,|x|}\,|3/2 \;\; 1 \;\; 5/2 \;\; -5/2>$

Da poenostavimo in uskladimo zapis baznih funkcij z zapisom v tabelah za Clebsch-Gordanove koeficiente, bomo pisali:

$$|S_0 \;\; S \;\; J \;\; Jz> \;\rightarrow\; |\,J \;\; Jz> \qquad\qquad |S_0\;S_0z>|S\;Sz> \;\rightarrow\; |S_0z>|Sz>,$$

saj sta S_0 in S konstantna.

<u>Izračun stanj:</u>

Vemo, da je $\mathbf{J} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}$ in $J_z = S_{0z} + S_z$

Torej je za stanje $J_z = 5/2$ možno le, če sta $S_{0z} = 3/2$ in $S_z = 1$, zato je:

$| 5/2 \quad 5/2 \rangle = |3/2 \rangle |1 \rangle$

sedaj bi radi dobili ša stanje z nižjim Jz. Spomnimo se na operator L-, ki na našo funkcijo deluje takole $L_- | l \; m \rangle = \sqrt{[l (l + 1) – m (m + 1)]}$. Če želimo sedaj dobiti nižje stanje delujemo z J- na najvišje stanje:

$J_- | 5/2 \quad 5/2 \rangle = \sqrt{[35/4 – 15/4]} \; | 5/2 \quad 3/2 \rangle = \sqrt{5} \; | 5/2 \quad 3/2 \rangle$

Operator J- pa lahko tudi razstavimo na $J_- = S_{0-} + S_-$, s tem operatorjem pa lahko delujemo na stanje $|3/2 \rangle |1 \rangle$, tako dobimo:

$$(S_{0-} + S_-) |3/2 \rangle |1 \rangle = (S_{0-} |3/2 \rangle) |1 \rangle + |3/2 \rangle (S_- |1 \rangle) = \\ = \sqrt{[15/4 – 3/4]} \; |1/2 \rangle |1 \rangle + \sqrt{2} \; |3/2 \rangle |0 \rangle$$

sledi: $| 5/2 \quad 3/2 \rangle = \sqrt{3/5} \; |1/2 \rangle |1 \rangle + \sqrt{2/5} \; |3/2 \rangle |0 \rangle$

Stanju z nižjim $J = 3/2$ ustrezata dve stanji S_{0z} in S_z to sta $|3/2 \rangle |0 \rangle$ in $|1/2 \rangle |1 \rangle$, torej lahko zapišemo:

$| 3/2 \quad 3/2 \rangle = A \; |1/2 \rangle |1 \rangle + B \; |3/2 \rangle |0 \rangle$

Ker so naši operatorji hermitski, so torej lastne funkcije za $| 3/2 \quad 3/2 \rangle$ ortogonalne na $| 5/2 \quad 3/2 \rangle$, torej velja:

$| 3/2 \quad 3/2 \rangle = -\sqrt{2/5} \; |1/2 \rangle |1 \rangle + \sqrt{3/5} \; |3/2 \rangle |0 \rangle$

Zdaj, ko poznamo osnovni princip iskanja tako imenovanih Clebsch – Gordonovih koeficientov, naj povem, da je mnogo bolj priročen način iskanja koeficientov, v tabelah:

TABELE CLEBSCH - GORDAN

3/2 × 1		5/2 5/2	5/2 3/2	3/2 3/2
+3/2	+1	1		
3/2	0		2/5	3/5
1/2	1		2/5	-2/5

$|5/2 \quad 5/2 \rangle = 1 \, |3/2 \rangle |1 \rangle$

$|5/2 \quad 3/2 \rangle = \sqrt{\tfrac{2}{5}} \, |3/2 \rangle |0 \rangle + \sqrt{\tfrac{2}{5}} \, |1/2 \rangle |1 \rangle$

$|3/2 \rangle |0 \rangle = \sqrt{\tfrac{2}{5}} \, |\tfrac{5}{2} \; \tfrac{3}{2} \rangle + \sqrt{\tfrac{2}{5}} \, |\tfrac{3}{2} \; \tfrac{3}{2} \rangle$