SPIN1

Marko Viršek

1.NALOGA

Za elektron v magnetnem polju, ki kaže v smeri z, ob času t=0 izmerimo $S_x = ½ \hbar$.
Določite pričakovane vrednosti S_x, S_y in S_z ob kasnejših časih!

2.REŠITEV

Magnetno polje kaže v smeri osi z:

$$\vec{B} = (0,0,B_z)$$

Zapišimo del Hamiltonove funkcije, ki opiše interakcijo z magnetnim poljem:

$$H = -\vec{p}_m . \vec{B}$$

$$\vec{p}_m = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

$$H = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{S}.\vec{B} = g\frac{\mu_B}{\hbar}S_z B$$

Lastni funkciji operatorja S_z sta $\left|\uparrow\right\rangle$ in $\left\langle\downarrow\right|$.

Operator S_z deluje na lastni funkciji na sledeč način:

$$S_z\left|\uparrow\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left|\uparrow\right\rangle$$

$$S_z\left|\downarrow\right\rangle = -\frac{\hbar}{2}\left|\downarrow\right\rangle$$

Začetno stanje zapišemo kot:

$$\left|\Psi\right\rangle = \alpha\left|\uparrow\right\rangle + \beta\left|\downarrow\right\rangle$$

Velja tudi:

$$S_x\left|\Psi\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left|\Psi\right\rangle$$

Ker velja:

$$S_+ = S_x + i\,S_y$$

$$S_- = S_x - i\,S_y$$

Lahko izrazimo:

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}$$

$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

Spomnimo se, kako delujeta operatorja S_+ in S_-

$$S_+ \left|\uparrow\right\rangle = 0$$

$$S_+ \left|\downarrow\right\rangle = \hbar \left|\uparrow\right\rangle$$

$$S_- \left|\uparrow\right\rangle = \hbar \left|\downarrow\right\rangle$$

$$S_- \left|\downarrow\right\rangle = 0$$

Zdaj lahko določimo neznana koeficienta:

$$S_x \left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)(\alpha\left|\uparrow\right\rangle + \beta\left|\downarrow\right\rangle) = \frac{\hbar}{2}\beta\left|\uparrow\right\rangle + \alpha\frac{\hbar}{2}\left|\downarrow\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left|\Psi\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\alpha\left|\uparrow\right\rangle + \frac{\hbar}{2}\beta\left|\downarrow\right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

Z normalizacijo še zares izračunamo koeficienta:

$$\left\langle\Psi\middle|\Psi\right\rangle = 1 = \alpha^2(\left\langle\uparrow\right| + \left\langle\downarrow\right|) \quad (\left|\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\right\rangle) = 2\alpha^2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Končno lahko zapišemo začetno valovno funkcijo:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$$

Sedaj lahko takoj napišemo časovni razvoj te funkcije:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle e^{-i\frac{E_\uparrow}{\hbar}t} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle e^{-i\frac{E_\downarrow}{\hbar}t} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle e^{-i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle e^{-i\omega t}$$

Pri čemer so:

$$E_\uparrow = g\frac{\mu_B B}{2} \quad ; \qquad E_\downarrow = -g\frac{\mu_B B}{2} \quad ; \quad \omega = \frac{g\mu_B B}{2\hbar}$$

Poglejmo si delovanje S_z na valovno funkcijo:

$$S_z|\Psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}|\uparrow\rangle e^{-i\omega t} - \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}|\downarrow\rangle e^{i\omega t}$$

Zdaj lahko izračunamo pričakovano vrednost S_z:

$$\langle S_z\rangle = \langle\Psi(t)|S_z|\Psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{4}((\langle\uparrow|e^{i\omega t} + \langle\downarrow|e^{-i\omega t}) \quad (|\uparrow\rangle e^{-i\omega t} - |\downarrow\rangle e^{i\omega t}) = \frac{\hbar}{2}(1-1) = 0$$

Izračunajmo še pričakovani vrednost Sx in Sy:

$$\langle S_x\rangle = \frac{\langle S_+\rangle + \langle S_-\rangle}{2} = \frac{\hbar}{4}(e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t}) = \frac{\hbar}{2}\cos 2\omega t$$

$$\langle S_y\rangle = \frac{\langle S_+\rangle - \langle S_-\rangle}{2i} = \frac{\hbar}{4i}(e^{2i\omega t} - e^{-2i\omega t}) = \frac{\hbar}{2}\sin\, 2\omega t$$

Vidimo da spin kroži v ravnini xy s frekvenco, ki ustreza razliki energij med lastnima stanjema.