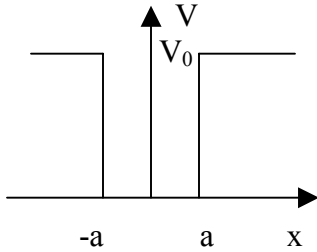


Limitna problema končne potencialne jame

Skica



Rešimo stacionarno Schroedingerjevo enačbo za dani potencial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = E\psi$$

Dobimo dve rešitvi (v jami in izven jame); rešujemo, da je $E < V_0$:

- v jami

$$\psi_1(x) = C \sin(\lambda_1 x) + D \cos(\lambda_1 x); \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{E2m}{\hbar^2}}$$

- izven jame

$$\psi_2(x) = B e^{-\lambda_2 x}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{(V_0 - E)2m}{\hbar^2}}$$

Iz robnih pogojev na meji jame dobimo pogoje za energijo. Ločimo preimera za sodo in liho valovno funkcijo:

- Soda valovna funkcija (vzameš cos):

$$\operatorname{tg}(\lambda_1 a) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Uvedemo:

$$\lambda_1 a = \mu$$

$$a^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = \mu_0^2; \quad \mu_0 = \sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}}$$

Dobimo:

$$\operatorname{tg} \mu = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 - 1}$$

- Liha valovna funkcija (vzameš sin):

$$\boxed{\operatorname{tg}(\lambda_1 a) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

Uvedemo:

$$\lambda_1 a = \mu$$

$$a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = \mu_0^2; \quad \mu_0 = \sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}}$$

Dobimo:

$$\boxed{-\operatorname{ctg} \mu = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 - 1}}$$

Limitna problema:

a) Neskončna potencialna jama

$$\boxed{V_0 \rightarrow \infty}$$

Enačbi za energije:

- Sod primer

$$\operatorname{tg} \mu = \infty$$

$$\mu = \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

- Lih primer

$$\operatorname{ctg} \mu = \infty$$

$$\mu = n\pi; \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Izkaže se, da mora biti n različen od 0 sicer pride val. funkcija identično enaka 0 in je ne moremo normalizirati!

Energije: (v potencialni jami)

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2 \lambda_1^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \mu^2}{2ma^2}}$$

- Sod primer

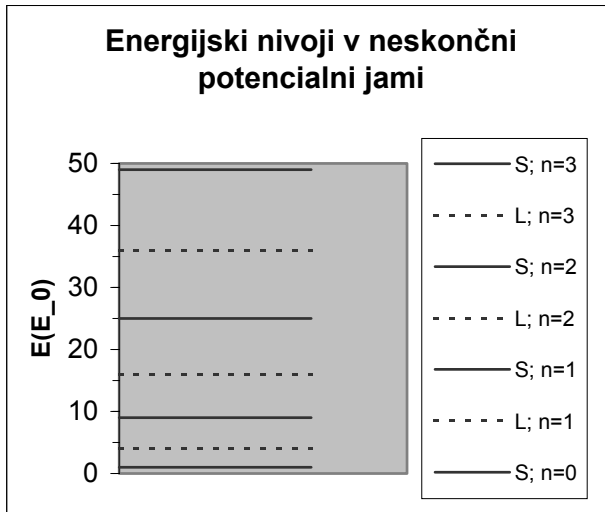
$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)^2; \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

- Lih primer

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (n\pi)^2; \quad n \in \mathbb{N}$$

Shema energijskih nivojev

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$$



Iz slike je očitno, da se energijski nivoji sodih in lihih rešitev izmenjujejo in naraščajo kot kvadrati lihih (sode rešitve) oziroma sodih (lihe rešitve) števil.

Valovne funkcije:

- Sode rešitve

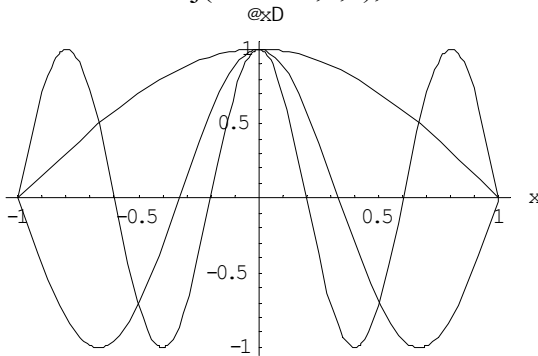
$$\psi_1(x) = D \cos(\lambda_1 x); \quad \lambda_1 = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} + m\pi \right); \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\psi_2(x) \equiv 0$$

Normalizacija:

$$\int_{-a}^a \psi_1^* \psi_1 dx = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Slika val.funkcij (za $n = 0, 1, 2$), če $a = 1$:



- Lihe rešitve

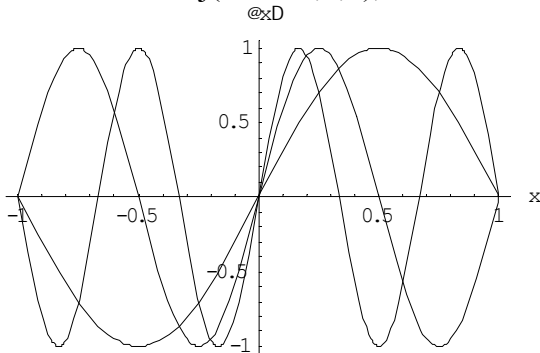
$$\psi_1(x) = C \sin(\lambda_1 x); \quad \lambda_1 = \frac{1}{a}(n\pi); \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\psi_2(x) \equiv 0$$

Normalizacija:

$$\int_{-a}^a \psi_1^* \psi_1 dx = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Slika val. funkcij (za $n=1,2,3$), če $a=1$:



b) Ploščina potencialne jame je konstantna, mejni potencial pa gre proti neskončnosti; jama se torej ožja

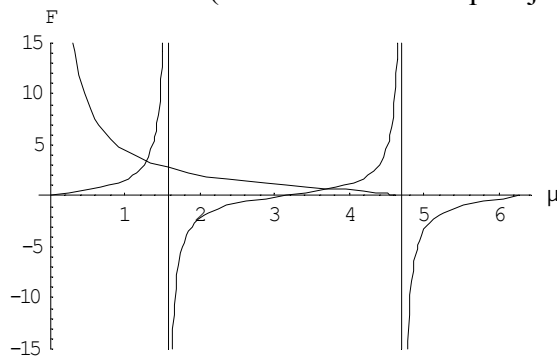
$$\boxed{V_0 \rightarrow \infty; \quad 2aV_0 = \text{const.}}$$

Za energije veljajo enačbe:

- sod primer:

$$\text{tg} \mu = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 - 1}$$

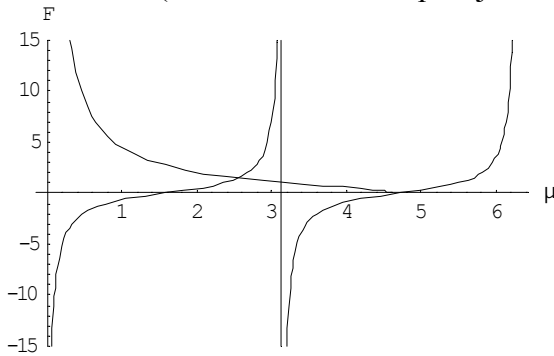
Na grafu je prikazana ločena odvisnost leve in desne strani enačbe od μ -ja. Desna stran enačbe (na sliki konstantno padajoča funkcija) ima ničlo ravno pri μ_0 .



- lih primer

$$-ctg\mu = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 - 1}$$

Na grafu je prikazana ločena odvisnost leve in desne strani enačbe od μ -ja. Desna stran enačbe (na sliki konstantno padajoča funkcija) ima ničlo ravno pri μ_0 .



- Izvedemo limito:

$$\lim_{\substack{V_0 \rightarrow \infty, \\ aV_0 = \text{const.}}} \mu_0 = \lim_{\substack{V_0 \rightarrow \infty, \\ aV_0 = \text{const.}}} \sqrt{\frac{2ma^2V_0}{\hbar^2}} = 0$$

Na osnovi zgornjih grafov in izvedene limite ugotovimo, da je v limiti v sodem primeru možna ena sama rešitev (vrednost energije), v lihem primeru pa nobena.

Določanje energije:

Velja:

$$tg\mu = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 - 1}$$

$$\mu < \mu_0$$

$$\mu = \mu_0 - \varepsilon; \quad \varepsilon \ll \mu_0$$

$$tg\mu \approx \mu = \mu_0 - \varepsilon$$

$$\sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 - 1} \approx \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu_0}}$$

$$\mu_0 - \cancel{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu_0}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\mu_0^3}{2}$$

$$\mu = \mu_0 - \frac{\mu_0^3}{2}$$

$$E = \frac{\hbar^2 \mu^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\mu_0 - \frac{\mu_0^3}{2} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\mu_0^2 - \mu_0^4 + \frac{\mu_0^6}{4} \right) =$$

$$= V_0 (1 - \mu_0^2)$$

$$\boxed{E = V_0 - \frac{m(2aV_0)^2}{2\hbar^2}}$$

Določanje valovne funkcije: (gledamo samo sodi primer)

$$\Psi_1 = D \cos(\lambda_1 x); \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(V_0 - \frac{m(2aV_0)^2}{2\hbar^2} \right)}$$

$$\approx D \left(1 - \frac{(\lambda_1 x)^2}{2} \right)$$

Ψ_1 v sami limiti ni definiran.

$$\Psi_2(x) = B e^{-\lambda_2 x}; \quad \lambda_2 = \frac{2maV_0}{\hbar^2}$$

Normalizacija:

$$\int_{-a}^a \Psi_1^* \Psi_1 dx = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{2a - \frac{2a^3 \lambda_1^2}{3} + \frac{a^5 \lambda_1^4}{10}}}$$

$$\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \Psi_2^* \Psi_2 dx = 1 \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2maV_0}{\hbar^2}}$$