Kvantna mehanika 1

Kvazivezana stanja II

Primož Bogataj

21. junij 2004

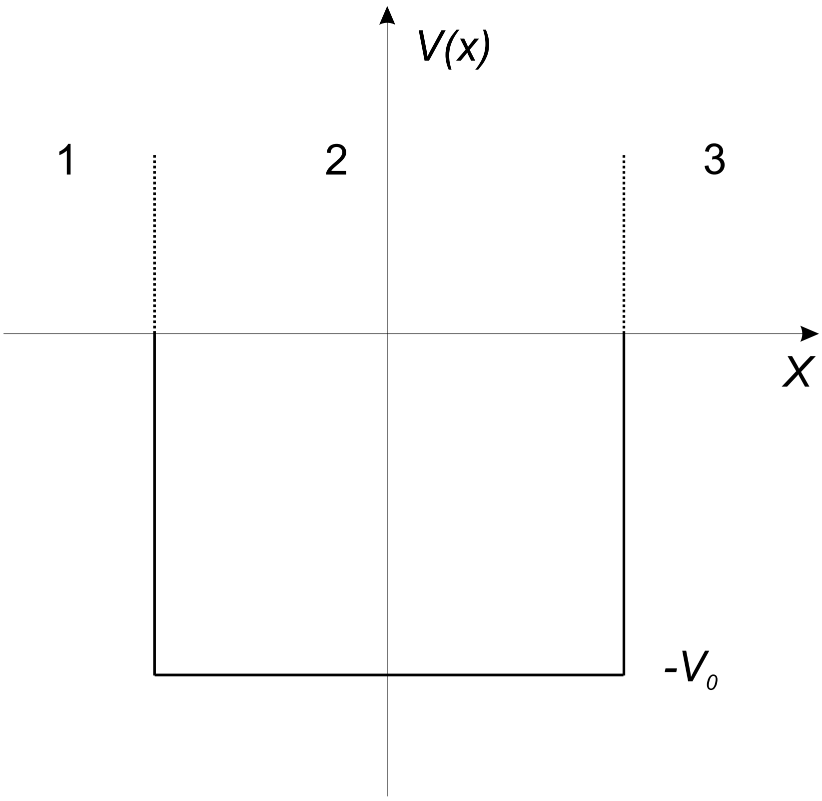
1 Naloga

Obravnavaj kvazivezana stanja delca v končni potencialni jami. Predpostavi, da je $\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \gg 1$.

2 Rešitev

Imamo potencialno jamo, katere potencial zapišemo kot

$$V(x) = \begin{Bmatrix} -V_0; & |x| < a \\ 0; & |x| > a \end{Bmatrix}.$$



Slika 1: Potencialna jama z globino $-V_0$

Najprej zapišemo Schrödingerjevo enačbo za vse tri dele potencialne jame. Za prvi in tretji del zapišemo

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + k^2\Psi = 0, \tag{1}$$

za drugi del pa

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + q^2\Psi = 0, \tag{2}$$

pri čemer sta

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \qquad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + V_0\right).$$

Rešitve Schrödingerjeve enačbe lahko sedaj zapišemo za vse tri dele

$$\Psi_1(x) = Ae^{\imath kx}, \tag{3}$$

$$\Psi_2(x) = Ce^{\imath qx} + De^{-\imath qx}, \tag{4}$$

$$\Psi_3(x) = Ge^{-\imath kx}. \tag{5}$$

Ker je potencial simetričen, so funkcije bodisi sode, bodisi lihe.

2.1 Sode funkcije

Ker imamo sode funkcije, zapišemo Ψ_2 sedaj kot

$$\Psi_2(x) = \tilde{C}\cosh(\imath qx). \tag{6}$$

Robni pogoji so:

$$\Psi_1(-a) = \Psi_2(-a), \qquad \Psi_2(a) = \Psi_3(a) \tag{7}$$

in

$$\left.\frac{\partial\Psi_1(x)}{\partial x}\right|_{x=-a} = \left.\frac{\partial\Psi_2(x)}{\partial x}\right|_{x=-a}, \qquad \left.\frac{\partial\Psi_2(x)}{\partial x}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial\Psi_3(x)}{\partial x}\right|_{x=a} \tag{8}$$

Vstavimo valovne funkcije v pogoje in dobimo

$$Ae^{-\imath ka} = \tilde{C}\cosh(\imath qa) \tag{9}$$

$$\imath kAe^{-\imath ka} = -\imath q\tilde{C}\sinh(\imath qa) \tag{10}$$

za prvo in drugo valovno funkcijo, za pogoje druge in tretje valovne funkcije dobimo podobni enačbi. Sedaj enačbi delimo in dobimo

$$k = -q\tanh(\imath qa). \tag{11}$$

2.2 Lihe funkcije

Podobno kot smo naredili za sode valovne funkcije, sedaj zapišemo Ψ_3 kot

$$\Psi_3(x) = \tilde{D}\sinh(\imath qa). \tag{12}$$

Vstavimo valovne funkcije v robne pogoje (7) in (8) ter dobimo

$$Ae^{-\imath ka} = -\tilde{D}\sinh(\imath qa) \tag{13}$$

$$\imath kAe^{-\imath ka} = \imath q\tilde{D}\cosh(\imath qa) \tag{14}$$

za prvo in drugo valovno funkcijo, za pogoje druge in tretje valovne funkcije dobimo podobni enačbi. Sedaj enačbi delimo in dobimo

$$k = -q\coth(\imath qa). \tag{15}$$

Sedaj enačbi (11) in (15) prepišemo v

$$\tan(\varepsilon) = \imath\sqrt{1 - \frac{C^2}{\varepsilon^2}} \tag{16}$$

in

$$\cot(\varepsilon) = -\imath\sqrt{1 - \frac{C^2}{\varepsilon^2}}, \tag{17}$$

pri čemer smo upoštevali zvezi

$$\tanh(\imath x) = \imath \tan(x), \qquad \coth(\imath x) = -\imath \cot(x) \tag{18}$$

in zapisali

$$C^2 = \frac{2ma^2}{\hbar^2} V_0 \tag{19}$$

ter

$$qa = \varepsilon, \qquad \varepsilon^2 = \frac{2ma^2}{\hbar^2}(E + V_0). \tag{20}$$

Ker imamo podobni enačbi kakor za vezan delec v potencialni jami in je $\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \gg 1$, pričakujemo, da bodo energije podobne in sicer za sode:

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_p \tag{21}$$

in za lihe:

$$\varepsilon_n = n\pi + \varepsilon_p. \tag{22}$$

Za izračun variacije ε_p moramo razviti $\tan((n + \frac{1}{2})\pi + \varepsilon_p)$ in $\cot(n\pi + \varepsilon_p)$ in dobimo

$$-\frac{1}{\varepsilon_p} \tag{23}$$

za $\tan((n + \frac{1}{2})\pi + \varepsilon_p)$ in

$$\frac{1}{\varepsilon_p} \tag{24}$$

za $\cot(n\pi + \varepsilon_p)$. Razvijemo tudi koren, ki nastopa in dobimo

$$\sqrt{1 - \frac{C^2}{\varepsilon_n^2}} \;\; \rightarrow \;\; 1 - \frac{C^2}{2\varepsilon_n^2}. \tag{25}$$

Ker sta enačbi skoraj enaki, le ε_n sta različna, bomo zapisali splošno

$$\varepsilon_n = z + \varepsilon_p. \tag{26}$$

Zapišemo enačbo

$$\frac{1}{\varepsilon_p} = -\imath\left(1 - \frac{C^2}{2z^2}\right) \tag{27}$$

in izrazimo ε_p in dobimo

$$\varepsilon_p = -\frac{\imath}{1 - \frac{C^2}{2z^2}}. \tag{28}$$

Sedaj zapišemo še energijo (pri čemer zanemarimo 1 v imenovalcu)

$$E_n = \frac{\hbar^2 \varepsilon_n^2}{2ma^2} - V_0 = \frac{\hbar^2 z^2}{2ma^2}\left(1 - \frac{\imath 2z}{C^2}\right)^2 - V_0 \tag{29}$$

in razpadni čas

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Im E} = \frac{2m^2a^4V_0}{\hbar^3 z^3}. \tag{30}$$

Končno lahko zapišemo razpadni čas za sode:

$$\tau = \frac{2m^2a^4V_0}{\hbar^3 \left(n + \frac{1}{2}\right)^3 \pi^3}. \tag{31}$$

in za lihe funkcije:

$$\tau = \frac{2m^2a^4V_0}{\hbar^3 (n\pi)^3}. \tag{32}$$