Jure Strle

Harmonski oscilator IV

Naloga:

Delec z nabojem e je v osnovnem stanju harmonskega oscilatorja $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$. Ob t je 0 v trenutku vključimo homogeno električno polje E. Izračunaj časovno odvisnost položaja, gibalne količine in energije delca ter nedoločenosti teh količin. Pokaži, da so pri makroskopskih nihanjih odstopanja od pričakovanih vrednosti zanemarljiva.

Rešitev:

Vse to lahko enostavno rešujemo z bra-ket formalizmom, pri čemer moramo vedeti le:

$$\tilde{a}|z\rangle = z|z\rangle \quad \text{in} \quad z(t) = -\frac{\Delta x}{\sqrt{2}x_0}e^{-i\omega t} \quad \text{, kjer je} \quad \Delta x = \frac{eE}{k}$$

vse ostalo pa lahko izpeljemo iz že poznanih zvez med položajem (x), gibalno količino (p) in energijo (H) ter kreacijskim (a) in anihilacijskim operatorjem (a^+), kjer ($x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ in $p_0 = \frac{\hbar}{x_0} = \sqrt{\hbar m\omega}$):

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right) \quad \rightarrow \quad a = \tilde{a} - z = \tilde{a} + \frac{\Delta x}{\sqrt{2}x_0} \quad ,$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - i\frac{p}{p_0}\right) \quad \rightarrow \quad a^+ = \tilde{a}^+ - z = \tilde{a}^+ + \frac{\Delta x}{\sqrt{2}x_0} \quad ,$$

$$x = \frac{a + a^+}{\sqrt{2}}x_0 = \frac{\tilde{a} + \tilde{a}^+}{\sqrt{2}}x_0 + \Delta x \quad \rightarrow \quad \tilde{x} = x - \Delta x = \frac{\tilde{a} + \tilde{a}^+}{\sqrt{2}}x_0 \quad ,$$

$$p = -i\frac{a - a^+}{\sqrt{2}}p_0 = -i\frac{\tilde{a} - \tilde{a}^+}{\sqrt{2}}p_0 = \tilde{p} \quad ,$$

$$H = \hbar\omega\left(\tilde{a}^+\tilde{a} + \frac{1}{2}\right) \quad .$$

Lega:

a) $\langle x\rangle$: Vsi nadaljni računi so izvedeni po istem postopku. Najprej željeno količino izrazimo z kreacijskim in anihilacijskim kreatorjem ($\tilde{a}, \tilde{a}^+$), za katera vemo (z je normiran in $\langle z|z\rangle = 1$):

$$\langle z|\tilde{a}|z\rangle = z\langle z|z\rangle = z \quad \text{in} \quad \langle z|\tilde{a}^+|z\rangle = \langle \tilde{a}z|z\rangle = \langle z|\tilde{a}|z\rangle^* = z^*$$

in nato rezultat izrazimo z $z(t)$.

$$\langle x\rangle = \langle z|x|z\rangle = \langle z|\frac{\tilde{a} + \tilde{a}^+}{\sqrt{2}}x_0 + \Delta x|z\rangle = \langle z|\frac{\tilde{a} + \tilde{a}^+}{\sqrt{2}}x_0|z\rangle + \langle z|\Delta x|z\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\langle z|\tilde{a}|z\rangle + \langle z|\tilde{a}^+|z\rangle) + \Delta x\langle z|z\rangle =$$

$$= \frac{x_0}{\sqrt{2}}(z+z^*) + \Delta x = \sqrt{2}x_0 \operatorname{Re}(z) + \Delta x = -\Delta x \cos(\omega t) + \Delta x = \Delta x(1-\cos(\omega t))$$

b) σ_x: za nedoločenost x je nekako logično, da je enaka nedoločenosti $\tilde{x}$, saj je prvi delec le zamaknjen glede na drugega, torej jo lahko izračunamo kar za slednjo, ker se le-ta malce lepše izrazi z $\tilde{a},\tilde{a}^+$.

$$\sigma_x = \sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{\langle \tilde{x}^2 \rangle - \langle \tilde{x} \rangle^2}$$

$$\langle \tilde{x} \rangle = -\Delta x \cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad \langle \tilde{x} \rangle^2 = \Delta x^2 \cos^2(\omega t)$$

$$\langle \tilde{x}^2 \rangle = \langle z | \tilde{x}^2 | z \rangle = \frac{x_0^2}{2} \langle z | \tilde{a}^2 + \tilde{a}\tilde{a}^+ + \tilde{a}^+\tilde{a} + \tilde{a}^{+2} | z \rangle = \frac{x_0^2}{2} \langle z | \tilde{a}^2 + 2\tilde{a}^+\tilde{a} + \tilde{a}^{+2} + 1 | z \rangle =$$

$$= \frac{x_0^2}{2}(z^2 + 2zz^* + z^{*2} + 1) = 2x_0^2 \operatorname{Re}^2(z) + \frac{x_0^2}{2} = \Delta x^2 \cos^2(\omega t) + \frac{x_0^2}{2}$$

$$\sigma_x = \sigma_{\tilde{x}} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

Tu smo se srečali s produktom operatorjev $\tilde{a},\tilde{a}^+$, pri čemer smo upoštevali, da velja $\langle z | \tilde{a}^{+n} \tilde{a}^m | z \rangle = \langle z | \tilde{a}^{+n} | \tilde{a}^m z \rangle = z^m \langle z | \tilde{a}^{+n} | z \rangle = z^{*n} z^m$, pri pričakovani vrednosti kvadrata lege pa je treba paziti tudi na to, da kreacijski in anihilacijski operator ne komutirata, marveč velja $[\tilde{a},\tilde{a}^+] = 1$ oziroma $\tilde{a}\tilde{a}^+ = \tilde{a}^+\tilde{a} + 1$. S tem znanjem lahko poljuben produkt teh operatorjev vedno pretvorimo v tak produkt, ki ga znamo izračunati, kar bomo s pridom uporabili pri računanju nedoločenosti energije.

Pri makroskopskih nihanjih (za velike Δx, gre razmerje $\frac{\sigma_x}{\Delta x}$ proti 0):

Gibalna količina:

a) $\langle p \rangle$: postopek je tu skoraj enak, razlika je le v konstanti in dejstvu, da je zaradi tega, ker je p izražen z razliko med $\tilde{a}$ in $\tilde{a}^+$, p kar enak $\tilde{p}$.

$$\langle p \rangle = \langle z | p | z \rangle = -i\frac{p_0}{\sqrt{2}} \langle z | a - a^+ | z \rangle = -i\frac{p_0}{\sqrt{2}} \langle z | \tilde{a} - \tilde{a}^+ | z \rangle = -i\frac{p_0}{\sqrt{2}}(z - z^*) = -i\sqrt{2}p_0 \operatorname{Im}(z) = i\frac{p_0}{x_0}\Delta x \sin(\omega t)$$

b) σ_p:

$$\langle p \rangle = i\frac{p_0}{x_0}\Delta x \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad \langle p \rangle^2 = -\frac{p_0^2}{x_0^2}\Delta x^2 \sin^2(\omega t)$$

$$\langle p^2 \rangle = \langle z | p^2 | z \rangle = -\frac{p_0^2}{2} \langle z | \tilde{a}^2 - \tilde{a}\tilde{a}^+ - \tilde{a}^+\tilde{a} + \tilde{a}^{+2} | z \rangle = -\frac{p_0^2}{2} \langle z | \tilde{a}^2 - 2\tilde{a}^+\tilde{a} + \tilde{a}^{+2} - 1 | z \rangle =$$

$$= -\frac{p_0^2}{2}(z^2 - 2zz^* + z^{*2} - 1) = -2p_0^2 \operatorname{Im}^2(z) + \frac{p_0^2}{2} = -\frac{p_0^2}{x_0^2}\Delta x^2 \sin^2(\omega t) + \frac{p_0^2}{2}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{p_0}{\sqrt{2}}$$

Energija:

a) $\langle H \rangle$:

$$\langle H \rangle = \langle z | H | z \rangle = \hbar\omega \langle z | \tilde{a}^{+}\tilde{a} + \frac{1}{2} | z \rangle = \hbar\omega (z^{*} z + \frac{1}{2})$$

b) σ_H: tu se izkoristi komutacija operatorjev $\tilde{a}$ in $\tilde{a}^{+}$, s pomočjo katere se refaktorizira četverni produkt v vsoto dveh produktov, ki ju že znamo rešiti.

$$\langle H \rangle = \hbar\omega (z^{*} z + \frac{1}{2}) \quad \rightarrow \quad \langle H \rangle^{2} = \hbar^{2}\omega^{2} (z^{*2} z^{2} + z^{*} z + \frac{1}{4})$$

$$\langle H^{2} \rangle = \langle z | H^{2} | z \rangle = \hbar^{2}\omega^{2} \langle z | \tilde{a}^{+}\tilde{a}\tilde{a}^{+}\tilde{a} + \tilde{a}^{+}\tilde{a} + \frac{1}{4} | z \rangle = \hbar^{2}\omega^{2} \langle z | \tilde{a}^{+}\tilde{a}^{+}\tilde{a}\tilde{a} + 2\tilde{a}^{+}\tilde{a} + \frac{1}{4} | z \rangle =$$

$$= \hbar^{2}\omega^{2} (z^{*2} z^{2} + 2 z^{*} z + \frac{1}{4})$$

$$\sigma_H = \sqrt{\langle H^{2} \rangle - \langle H \rangle^{2}} = \hbar\omega \sqrt{z^{*} z} = \hbar\omega |z|$$

Razmerje $\frac{\sigma_H}{\langle H \rangle} = \frac{\hbar\omega |z|}{\hbar\omega (|z|^{2} + \frac{1}{2})} \approx \frac{1}{|z|}$ gre za velike z spet proti 0.