Sipanje v 1-D III

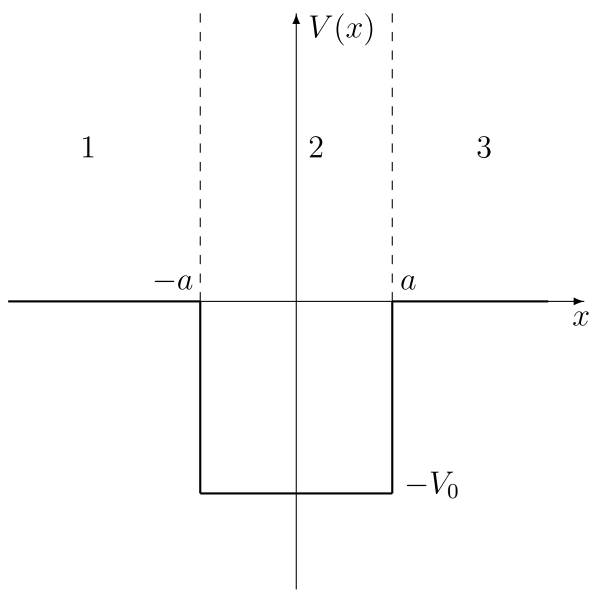
Mirko Kokole

1 Naloga

Obravnavaj sipanje v končni potencialni jami, $V(x) = -V_0\Theta(|a| - x)$.

- Izračunaj prepustnost.
- Obravnavaj prepustnot v primeru, ko je $\sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} \gg 1$

2 Rešitev



Slika 1: Potencialna jama z globino $-V_0$

Ker obravnavamo sipanje, lahko zapišemo rešitve Schrödingerjeve enačbe za vsakega od treh delov.

$$\psi_1 = Ae^{ik_1(x+a)} + Be^{-ik_1(x+a)}$$
$$\psi_2 = Ce^{ik_1 x} + De^{-ik_1 x}$$
$$\psi_3 = Ee^{ik_1(x-a)}$$

Kjer je $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ in $k_2^2 = \frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}$.
Valovna funkcija mora biti na mejah zvezno odvedljiva, torej so robni pogoji sledeči:

$$\psi_1(-a) = \psi_2(-a)$$
$$\frac{d}{dx}\psi_1(-a) = \frac{d}{dx}\psi_2(-a)$$
$$\psi_2(a) = \psi_3(a)$$
$$\frac{d}{dx}\psi_2(a) = \frac{d}{dx}\psi_3(a)$$

Iz robnih pogojev dobimo sledeče enačbe:

$$A + B = Ce^{-ik_2 x} + De^{ik_2 x} \tag{1}$$
$$ik_1 A - ik_1 B = ik_2 Ce^{-ik_2 x} - ik_2 De^{ik_2 x} \tag{2}$$
$$Ce^{ik_2 x} + De^{-ik_2 x} = E \tag{3}$$
$$ik_2 Ce^{ik_2 x} - ik_2 De^{-ik_2 x} = ik_1 E \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

Prepustnost potencialne jame nam podaja kvocient $T = \frac{|E|^2}{|A|^2}$. Dobimo pa ga s sledečim računom: najprej delimo enačbo 5 s ik_2 in nato enačbi 4 in 5 enkrat seštejemo in drugč odštejemo tako, da dobimo:

$$C = \frac{1}{2}\frac{k_2+k_1}{k_2}e^{-ik_2 a}E$$
$$D = \frac{1}{2}\frac{k_2-k_1}{k_2}e^{ik_2 a}E$$

Nato pa delimo enačbo 3 s ik_1 in enačbi 2 in 3 seštejemo, da dobimo:

$$2A = C\frac{k_1+k_2}{k_1}e^{-ik_2 a} - D\frac{k_2-k_1}{k_1}e^{ik_2 a}$$

Če sedaj v to enačbo vstavimo prej dobljena C in D, dobimo sledeč izraz:

$$4A = \frac{E}{k_1 k_2}\left[(k_2+k_1)^2 e^{-2ik_2 a} - (k_2-k_1)^2 e^{2ik_2 a}\right]$$

Izraz v oglatem oklepaju lahko še polepšamo tako, da uporabimo sledeče zveze:

$$2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}$$
$$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$$

In dobimo:

$$4A = \frac{2E}{k_1 k_2}\left[2k_1k_2\cos(2k_2a) - i(k_1^2 + k_2^2)\sin(2k_2a)\right]$$

Sedaj pa že lahko zapišemo prepustnot:

$$T = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1k_2}\right)^2 \sin^2(2k_2a)\right]^{-1}$$

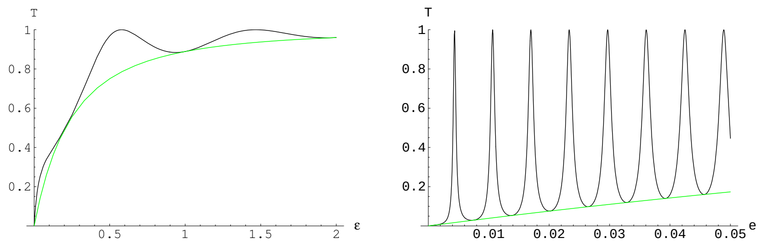
Uporabimo še k_1 in k_2 tako da dobimo sledečo enačbo za prepustnost končne potencialne jame.:

$$T = \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V_0^2}{E(E+V_0)}\right)^2 \sin^2\left(2a\sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}\right)\right]^{-1} \tag{6}$$

Rezultat lahko lepše zapišemo, če uporabimo sledeči dve novi spremenljivki $\epsilon = \frac{E}{V_0}$ in $\lambda = 2a\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$, tako da dobimo:

$$T = \left[1 + \frac{1}{4}\frac{1}{\epsilon(\epsilon+1)}\sin^2\lambda\sqrt{\epsilon+1}\right]^{-1} \tag{7}$$

Iz enačbe 7 vidimo, da je prepustnost enaka 1, kadar je $\lambda\sqrt{\epsilon+1} = n\pi$, kar pomeni, da je energija enaka $E_R = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m(2a)^2} - V_0$. Vidimo tudi, da za $\sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} \gg 1$ ali $\lambda \gg 1$ prepustnost zelo hitro niha.



Slika 2: Prepustnost končne potencialne jame za $\lambda = 10$ (zgoraj) in $\lambda = 1000$ (spodaj).

Poskusimo sedaj še izračunati izraz za širino resonance. Pri tem si bomo pomagali z izrazom za kompleksno prepustnost.

$$\frac{E}{A} = \left[cos(2k_2a) - \frac{i}{2}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1k_2}\right) sin(2k_2a)\right]^{-1} \tag{8}$$

Resonance dobimo pri polih enačbe 8. Poli ležijo v kompleskni ravnini in imajo obliko $E = E_R + \frac{i\Gamma}{2}$. E_R je energija resonance, Γ pa širina resonance. Iščemo torej rešitve enačbe:

$$1 - \frac{i}{2}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1k_2}\right) tg(2k_2a) = 0 \tag{9}$$

Prej smo že izračunali, da dobimo resnanco pri energiji E_R. Poskusimo si sedaj pomagati s taylorjevim razvojem okoli resonance $E = E_R + \delta E$. Pri tem vemo da je:

$$tg(2k_2a)|_{E_R} = 0 \tag{10}$$

$$cos(2k_2a)|_{E_R} = 1 \tag{11}$$

Razvijemo torej izraz:

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{k_1^2+k_2^2}{k_1k_2}\right) tg(2k_2a) \sim \left(\tfrac{k_1^2+k_2^2}{k_1k_2}\right) tg(2k_2a)|_{E_R}+\\ &\quad +\tfrac{1}{2!}\left[\tfrac{d}{dE}\left(\tfrac{k_1^2+k_2^2}{k_1k_2}\right) tg(2k_2a)|_{E_R} + \left(\tfrac{k_1^2+k_2^2}{k_1k_2}\right)\tfrac{d(2k_2a)}{dE}\tfrac{1}{cos^2(2k_2a)}|_{E_R}\right](E - E_R) =\\ &\quad = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{k_1^2+k_2^2}{k_1k_2}\right)\tfrac{1}{cos^2(2k_2a)}\tfrac{d(2k_2a)}{dE}|_{E_R}(E - E_R) = \tfrac{4}{\Gamma}(E - E_R)\end{aligned}$$

Tako smo prišli do izraza za Γ:

$$\frac{4}{\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1k_2}\right)\frac{d(2k_2a)}{dE}|_{E_R} \tag{12}$$

Če sedaj v ta izraz vstavimo izraza za k_1 in k_2 dobimo širino resonance izraženo kot:

$$\frac{4}{\Gamma} = \frac{(2E_R + V_0)}{(E_R + V_0)\sqrt{E_R}}\frac{a\sqrt{2m}}{\hbar} \tag{13}$$