Kvanta mehanika domaca naloga

Hana Uršič

9.4.2003

1 Prva naloga

Navodilo za prvo nalogo:
Imamo potencialno jamo, katere delta funkcije so obrnjene v negativno smer. Koordinatni sistem postavim tako, da sta meji jame (delta funkciji postavljeni pri -a, a). Potencial zapišemo:

$$V(x) = -V_o(\delta(x-a) + \delta(x+a))$$

Zanima nas kakšna so vezana stanja?
Reševanje:
Ker je potencial simetričen, so funkcije sode ali lihe. Splošno velja:

$$\psi_1 = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

$$\psi_2 = Ce^{\lambda x} + De^{-\lambda x}$$

$$\psi_3 = Ee^{-\lambda(x-a)}$$

Oglejmo si sode funkcije:

$$\psi_2 = Kch(\lambda x)$$

Upoštevajmo še robne pogoje:

$$\psi_2(a) = \psi_3(a)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x}(a) - \frac{\partial \psi_3}{\partial x}(a) = \frac{2mV_o}{\hbar^2}\psi(a)$$

Uvedem novo spremenljivko, zaradi manj pisanja:

$$q = \frac{2mV_o}{\hbar^2}$$

Enake robne pogoje dobimo pri x=-a, s tem pa tudi simetrične enačbe. Valovne funkcije vstavim v robne pogoje:

$$Kch(\lambda a) = E$$

$$\lambda * Ksh(\lambda a) - \lambda * E = q * E$$

Prvi izraz vstavim v drugega ter delim z $ch(\lambda * a)$. Tako dobimo transcendentno enačbo:

$$\lambda * th(\lambda a) + \lambda = q$$

Še premečem:

$$th(\lambda a) + 1 = \frac{q}{\lambda}$$

Podobno napravimo za lihe funkcije:

$$\psi_2 = Fsh(\lambda x)$$

Še enkrat upoštevam robne pogoje:

$$Fsh(\lambda a) = E$$

$$\lambda * Fch(\lambda a) + \lambda * E = q * E$$

Enačbi združim in malo premečem:

$$\lambda * Fch(\lambda a) + \lambda * Fsh(\lambda a) = q * Fsh(\lambda a)$$

$$\lambda * cth(\lambda a) + \lambda = q$$

Tako dobim enačbo:

$$cth(\lambda a) + 1 = \frac{q}{\lambda}$$

2 Druga naloga

Navodilo za drugo nalogo:
Imamo potencialno jamo. Delda funkciji sta obrnjeni navzgor ter ležita pri -a in a.
Reševanje:
Iščemo kvazivezana stanja, zato v zgornjih enačbah λ preide v -ik, q pa v -q. Zgornji enačba za sode in za lihe funkcije se tako glasita:

$$th(-ika) + 1 = \frac{q}{ik}$$

$$cth(-ika) + 1 = \frac{q}{ik}$$

Upoštevem še matematične izraze:

$$th(ix) = ith(x)$$

$$cth(ix) = -icth(x)$$

Tako dobimo:

$$-itg(ka) + 1 = \frac{q}{ik}$$

$$ictg(ka) + 1 = \frac{q}{ik}$$

Zadnjič smo pri vajah videli, da imamo resonance pri energijah, ki so enake kot energije za neskončno potencialno jamo. Zato tudi tukaj pričakujemo podobne rešitve. Nastavimo:

$$k_a = n\frac{\pi}{2} + \delta$$

za sode; n je lih

$$k_a = n\frac{\pi}{2} + \delta$$

za lihe; n je sod

Izračunajmo sedaj variacijo δ. Vstavimo naš nastavek v zgornje enačbe.

$$-itg(n\frac{\pi}{2} + \delta) + 1 = \frac{q}{ik}$$

$$itg(n\frac{\pi}{2} + \delta) + 1 = \frac{q}{ik}$$

Razvijemo:

$$tg(\frac{\pi}{2} + \delta) = \frac{sin(\frac{\pi}{2} + \delta)}{cos(\frac{\pi}{2} + \delta)} = \frac{1}{-\delta}$$

Za ctg pa dobimo:

$$\frac{1}{\delta}$$

Vidimo, da za oba primera dobimo enako enačbo:

$$\frac{i}{\delta} + 1 = \frac{q}{ik}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{ik - q}{k}$$

Ulomek pomnožim z a:

$$\delta = \frac{ka}{ika - qa} = \frac{-(n\frac{\pi}{2} + \delta)}{qa - i(n\frac{\pi}{2} + \delta)}$$

$$\delta qa - i\delta(n\frac{\pi}{2} + \delta) = -n\frac{\pi}{2} - \delta$$

Sedaj zanemarimo kvadratni člen δ^2 in dobimo:

$$\delta = \frac{-n\frac{\pi}{2}}{qa - in\frac{\pi}{2} + 1}$$

Racionaliziramo imenovalec:

$$\delta = \frac{-n\frac{\pi}{2} * (qa - in\frac{\pi}{2} + 1)}{(qa + 1)^2 + (n\frac{\pi}{2})^2}$$

Če so delta funkcije zelo močne, to je, če (qa) je zelo večji od 1, potem lahko zanemarimo v zgornjem izrazu obe enici, zanemarimo pa lahko tudi $(n\frac{\pi}{2})^2$.

$$\delta = -n\frac{\pi}{2}\frac{1}{qa} + in^2(\frac{\pi}{2})^2\frac{1}{(qa)^2}$$

Izračunali smo δ, tako dobimo:

$$k_a = n\frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{qa} - i\frac{n\pi}{2(qa)^2})$$

$$E = \frac{\hbar^2(ka)^2}{ma^2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}n^2\frac{\pi^2}{2^2}(1 - \frac{1}{qa} - i\frac{n\pi}{2q^2a^2})$$

$$E_n = E_n^o(1 - \frac{2}{qa} - \frac{in\pi}{q^2a^2})$$

Z E_n^o smo označili energijo neskončne potencialne jame. Vidimo, da so energije naše jame nekoliko nižje od energij neskončne potencialne jame, saj ima delec na voljo več prostora, kot pri neskončni jami.
Pri prejšnji nalogi smo imeli valovni funkciji:

$$\psi_2 = Kch(\lambda x)$$

$$\psi_3 = Ee^{-\lambda(x-a)}$$

Pri naši nalogi, pa kot smo zgoraj omenili spremenimo λ v -ik. Tako dobimo:

$$2)ch(-ikx)$$

$$3)e^{ik(x-a)}$$

Naredimo sedaj časovni razvoj valovne funkcije ter izračunajmo verjetnostno gostoto:

$$\psi_n(x)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

$$\rho(x,t) = \psi_n^*\psi_n e^{i\frac{E_n^*}{\hbar}}e^{-i\frac{E_n}{\hbar}}$$

Izračunajmo eksponent:

$$-iE_n^o(1 - \frac{2}{qa} - \frac{in\pi}{(qa)^2}) + iE_n^o(1 - \frac{2}{qa} + \frac{in\pi}{(qa)^2}) = E_n^o(-\frac{2n\pi}{(qa)^2}) = 2ImE_n$$

$$\rho(x,t) = \rho_o e^{-2\frac{ImE_n}{\hbar}t} = \rho_o e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

Vidimo, da je:

$$\tau_n = \frac{4q^2a^2}{2E_n^o n\pi} = \frac{4q^2a^4m}{\hbar\pi^3n^3}$$

Izračunali smo razpadni čas. Višje kot je stanje, hitreje razpade. Vidimo pa tudi, da čim močnejša je δ funkcija, daljši je razpadni čas, saj delec težje pride skozi njo.