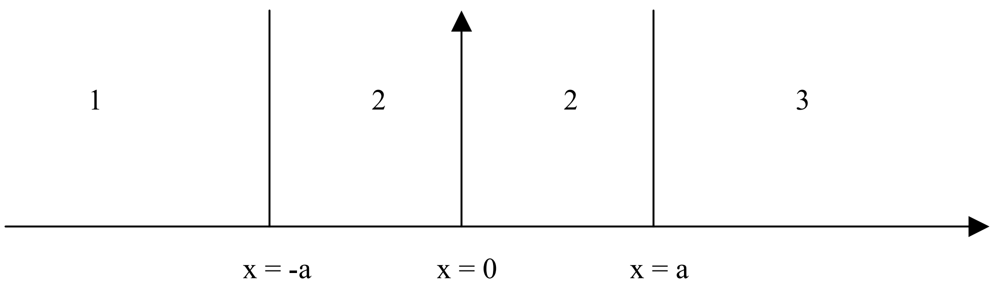
KVANTNA MEHANIKA – DOMAČA NALOGA
PROPUSTNOST POTENCIALA DVEH DELTA FUNKCIJ

Jure Koncilija

Imamo potencial sestavljen iz dveh δ funkcij: $V = V_o\delta(x-a) + V_o\delta(x+a)$



Na naš potencial iz leve vpada curek delcev (območje 1), pri tem se ga del odbije od potenciala, del pa je prepuščen (območje 3). Zanima nas kolikšna je propustnost takšnega potenciala:

$$T = \left(\frac{|F|}{|A|}\right)^2$$

Za izračun razdelimo naš potencial na tri območja (kot so označena na skici) in zapišemo funkcije za vsak del posebej (Potencial si lahko zamislimo tudi drugače – tako, da sta delta potenciala v izhodišču: x = 0 in pa v točki x = a, vendar se izkaže, da je izračun propustnosti veliko daljši in nerodnejši):

1. območje: $\psi_1 = Ae^{ik(x+a)} + Be^{-ik(x+a)}$

2. območje: $\psi_2 = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$

3. območje: $\psi_3 = Fe^{ik(x-a)}$

Prav tako vemo, kakšnim pogojem mora biti zadoščeno na prehodih iz enega območja v drugo. Zaradi zveznosti veljata pogoja:

1 - 2: $\psi_1|_{x=-a} = \psi_2|_{x=-a}$; 2 – 3: $\psi_2|_{x=a} = \psi_3|_{x=a}$

Za odvode funkcij pa velja:

1 - 2: $\frac{\partial}{\partial x}\psi_1|_{x=-a} - \frac{\partial}{\partial x}\psi_2|_{x=-a} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi_1|_{x=-a}$

in

2 - 3: $\frac{\partial}{\partial x}\psi_2|_{x=a} - \frac{\partial}{\partial x}\psi_3|_{x=a} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi_3|_{x=a}$

Vpeljemo novo spremenljivko: $q = \frac{mV_0}{\hbar^2}$

Iz pogojev sedaj dobimo naslednje enačbe:

(1) $A + B = Ce^{-ika} + De^{ika}$

(2) $Aik – Bik – Cike^{-ika} + Dike^{ika} = 2q(A + B)$

(3) $Ce^{ika} + De^{-ika} = F$

(4) $Cike^{ika} – Dike^{-ika} – Fik = 2qF$

Enačbo (4) delimo z ik in nato prištejemo enačbi (3) – tako dobimo izraz za C:

$$2Ce^{ika} = 2qF + 2\frac{F}{ik} \quad \Rightarrow \quad C = F\left(\frac{q}{ik}+1\right)e^{-ika} \qquad (5)$$

Iz (3) enačbe pa potem še hitro izrazimo D:

$$De^{-ika} = F – F\left(\frac{q}{ik}+1\right) \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{q}{ik}Fe^{ika} \qquad (6)$$

Izraza za C (5) in D (6) vstavimo v enačbo (1) ter tako dobimo izraz za B:

$$A + B = F\left(\frac{q}{ik}+1\right)e^{-2ika} - \frac{q}{ik}Fe^{2ika} \quad \Rightarrow \quad B = F\left(\frac{q}{ik}+1\right)e^{-2ika} - \frac{q}{ik}Fe^{2ika} - A \qquad (7)$$

Sedaj izraze za B (7), C (5) in D (6) vstavimo v enačbo (2):

$$A – B – Ce^{-ika} + De^{ika} = \frac{2q}{ik}(A + B)$$

$$A\left(1+\frac{2q}{ik}\right) – B\left(1-\frac{2q}{ik}\right) = Ce^{-ika} - De^{ika}$$

$$A\left(1+\frac{2q}{ik}\right) – F\left(1 - \frac{q}{ik}\right)\left(1-\frac{2q}{ik}\right)e^{-2ika} - \frac{q}{ik}\left(1-\frac{2q}{ik}\right)Fe^{2ika} + A\left(1-\frac{2q}{ik}\right) = F\left(1- \frac{q}{ik}\right)e^{-2ika} - \frac{q}{ik}Fe^{2ika}$$

$$2A- F\left(1 - \frac{q}{ik}\right)e^{-2ika}\left(1-\frac{2q}{ik} -1\right) - \frac{q}{ik}Fe^{2ika}\left(1-\frac{2q}{ik}-1\right) = 0$$

In končno:

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{\left(1-\frac{q}{ik}\right)^2 e^{-2ika} + \frac{q^2}{k^2}e^{2ika}}$$

Če želimo dobiti izraz za propustnost:

$$T = \left(\frac{|F|}{|A|}\right)^2$$

Za lažji izračun najprej obrnimo izraz in zapišimo:

$$\frac{A}{F} = 1 + \frac{i2q}{k} e^{-2ika} + \frac{q^2}{k^2}\left(e^{2ika} - e^{-2ika}\right) = 1 + \frac{i2q}{k} e^{-2ika} + \frac{i2q^2}{k^2}\sin(2ka)$$

Kvadrat absolutne vrednosti kompleksnega števila je enak vsoti kvadrata realnega in imaginarnega dela:

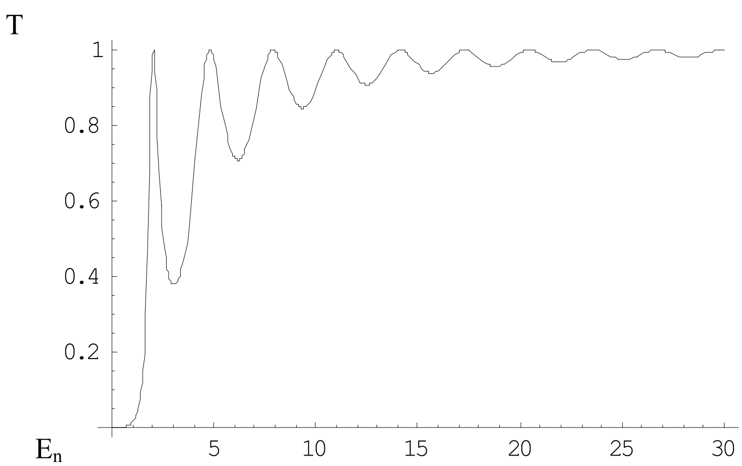
$(\mathrm{Re})^2$: $\cos^2(2ka) + \frac{4q^2}{k^2}\sin^2(2ka) + \frac{4q}{k}\sin(2ka)\cos(2ka)$

$(\mathrm{Im})^2$: $\frac{4q^2}{k^2}\cos^2(2ka) + \frac{4q^4}{k^4}\sin^2(2ka) + \sin^2(2ka) + \frac{8q^3}{k^3}\sin(2ka)\cos(2ka) - \frac{4q^2}{k^2}\sin^2(2ka) - \frac{4q}{k}\sin(2ka)\cos(2ka)$

Ko kvadrata seštejemo se nam veliko členov uniči in z malo premetavanja dobimo izraz za propustnost:

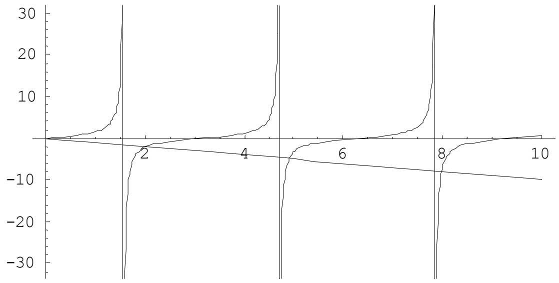
$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{4q^2}{k^2}\left(\cos(2ka) + \frac{q}{k}\sin(2ka)\right)^2}$$

Grafično ta funkcija izgleda takole (ne meni se za enote osi x, ker so odvisne od q):



Da bi določili položaje maksimumov, kjer propustnost doseže vrednost 1, bi morali rešiti transcendentno enačbo: $tg(2ka) = -\frac{k}{q}$.

Graf transcendentne enačbe



Nas pa zanima propustnost v limiti, ko je $\frac{2mV_0 a}{\hbar^2} >> 1$, torej ko je naš q zelo velik. Iz grafa transcendentne enačbe se vidi, da so v tem primeru njene rešitve kar ničle tangensa:

$2ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{2a}$ torej se energija zapiše kot:

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma}$$

Širino resonance (na polovični višini) pri velikih q pa lahko izrazimo:

$$\cos(2ka) \cong 1 \ \ ; \ \ \sin(2ka) \cong \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 4(\frac{q}{k})^2 + 8(\frac{q}{k})^3 \varepsilon + 4(\frac{q}{k})^4 \varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{-2(\frac{q}{k})^3 \pm \sqrt{1 - 32(\frac{q}{k})^5 + 4(\frac{q}{k})^6}}{2(\frac{q}{k})^2}$$

In končno širina: $\Gamma_k = 2\varepsilon$