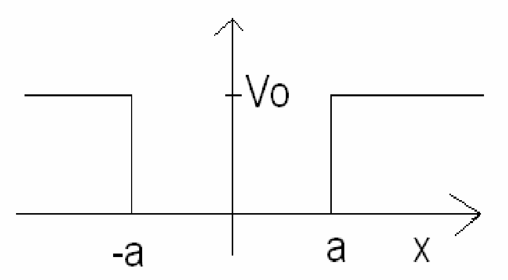
Koncna potencialna jama 1

Naloga:



Imamo potencial $V(x) = \begin{cases} V_0 & za \ \ |x| \geq a \\ 0 & za \ \ |x| < a \end{cases}$

1. Pokaži, da v primeru sodega potenciala V(x)=V(-x) lahko najdemo take lastne funkcije , ki imajo dobro doloceno parnost; so sode ali lihe.

2. Poišci transcendentno enacbo , ki doloca lastne energije koncne potencialne jame s širino 2a in višino V_0. Pokaži, da za vsak V_0 in a obstaja vsaj eno vezano stanje.

Rešitev prvega problema:

Najprej zapišemo Schroedingerjevo enacbo

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \qquad (1.1)$$

H v našem primeru zapišemo kot

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x) \qquad (1.2)$$

Išcemo lastne vrednosti operatorja $\hat{H}$

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \qquad (1.3)$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$H(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \qquad (1.4)$$

Sedaj pokažimo, da so lastne funkcije lahko samo sode ali samo lihe.

V enacbo (4) vstavimo -x in poglejmo kaj se zgodi.

$$H(-x)\Psi(-x) = E\Psi(-x) \qquad (1.5)$$

Ker je H(x) soda je H(x)= H(-x)
Locimo dva primera:

1.Opazujemo eno samo funkcijo Ψ z energijo E, se pravi da imamo nedegeneriranost energije. Torej lahko zapišemo

$$\Psi(-x) = a\Psi(x) \qquad a \in \Re \qquad (1.6)$$

Dolocimo a tako, da opazujemo vrednost Ψ pri x=0.

$$\Psi(0) = a\Psi(0) \qquad (1.7)$$

Enacba (7) bo izpolnjena le, ce bo $a = 1$, kar pomeni, da je Ψ soda, ali pa ce bo $\Psi(0) = 0$.

Poglejmo si še vrednost odvoda enacbe (6) v tocki x=0.

$$\left.\frac{\partial\Psi(-x)}{\partial x}\right|_{x=0} = a\left.\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\right|_{x=0} \qquad (1.8)$$

kar je enako

$$-\left.\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = a\left.\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\right|_{x=0} \qquad (1.9)$$

Sledi, da je $a = -1$,kar pomeni, da je Ψ liha, ali pa da je $\frac{\partial\Psi(0)}{\partial x} = 0$, iz cesar sledi, da je Ψ identicno enaka nic.

2.Imamo degeneriranost energije, kar pomeni, da eksistirata vsaj dve linearno neodvisni rešitvi, $\Psi(x)$ in $\Psi(-x)$,z isto energijo. Torej lahko konstruiramo funkcijo Ψ_3, ki bo njuna linearna kombinacija. Pokažimo, da je tudi Ψ_3 lahko samo liha ali pa samo soda.

$$\Psi_3 = a\Psi(x) + b\Psi(-x) \qquad (1.10)$$

Ocitno je, da velja

$$H(x)\Psi_3(x) = E\Psi_3(x) \tag{1.11}$$

Poglejmo si dva primera:

1. ce $a = b$ lahko zapišemo

$$\Psi_3 = a\,(\Psi(x) + \Psi(-x)) \tag{1.12}$$

Vidimo, da je Ψ_3 soda.

2. ce $a = -b$ lahko zapišemo

$$\Psi_3 = a\,(\Psi(x) - \Psi(-x)) \tag{1.13}$$

Vidimo, da je Ψ_3 liha.

Se pravi, da vedno lahko najdemo take funkcije ali kombinacije funkcij, ki so ali lihe ali sode.

Rešitev drugega problema:

Išcemo lastne vrednosti stacionarne Schroedingerjev enacbe

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{2.1}$$

Ko za p vstavimo $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, dobimo sledeco enacbo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x) = E\,\Psi(x) \tag{2.2}$$

Privzamemo, da je V(x)=konst. In enacbo rešimo z nastavkom $\Psi(x) = Ae^{lx} + Be^{-lx}$
Dobimo

$$\frac{\hbar^2}{2m}l^2 + (V - E) = 0 \qquad \Rightarrow \; l = \pm\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}} \tag{2.3}$$

Locimo dva primera:

1. E > V

Sledi $$l = i\sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$$

V peljemo $$l_1 = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$$

Velja $$E = V + \frac{l^2\hbar^2}{2m}$$

Rešitev enacbe (2.2) je

$$\Psi_1(x) = Ae^{il_1x} + Be^{-il_1x} \qquad (2.4)$$

oziroma

$$\Psi_1(x) = C\sin(l_1x) + D\cos(l_1x) \qquad (2.5)$$

2. E < V

V peljemo $$l_2 = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$$

Velja $$E = V - \frac{l^2\hbar^2}{2m}$$

Rešitev enacbe (2.2) je

$$\Psi_2(x) = Ae^{l_2x} + Be^{-l_2x} \qquad (2.6)$$

oziroma

$$\Psi_2(x) = Gsh(l_2x) + Hch(l_2x) \qquad (2.7)$$

To je bilo bolj splošno sedaj pa si oglejmo konkreten primer potencialne jame
In sicer si bomo ogledali primer, ko ima delec energijo manjšo od V_0. Se pravi E< V_0.
Za valovno funkcijo Ψ v potencialni jami veljata naslednja dva pogoja

$$\Psi_1(a) = \Psi_2(a) \tag{2.8}$$

$$\left.\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\right|_{x=a} \tag{2.9}$$

Najprej si ogledamo sode rešitve

Zato pri Ψ_1 vzamemo samo kosinus. Pri Ψ_2 pa vzamemo samo clen z negativnim eksponentom, saj zahtevamo da velja $\lim_{x\to\infty}\Psi(x) = 0$.
Upoštevajoc enacbi (2.8) in (2.9) sledi

$$D\cos(l_1 a) = Be^{-l_2 a} \tag{2.10}$$

$$-l_1 D\sin(l_1 a) = -l_2 Be^{-l_2 a} \tag{2.11}$$

Dobili smo sistem dveh enacb, ki ima rešitev le takrat, ko je determinanta sistema enaka nic. Sledi

$$\cos(l_1 a)\, l_2 e^{-l_2 a} - l_1 \sin(l_1 a) e^{-l_1 a} = 0 \tag{2.12}$$

se pravi

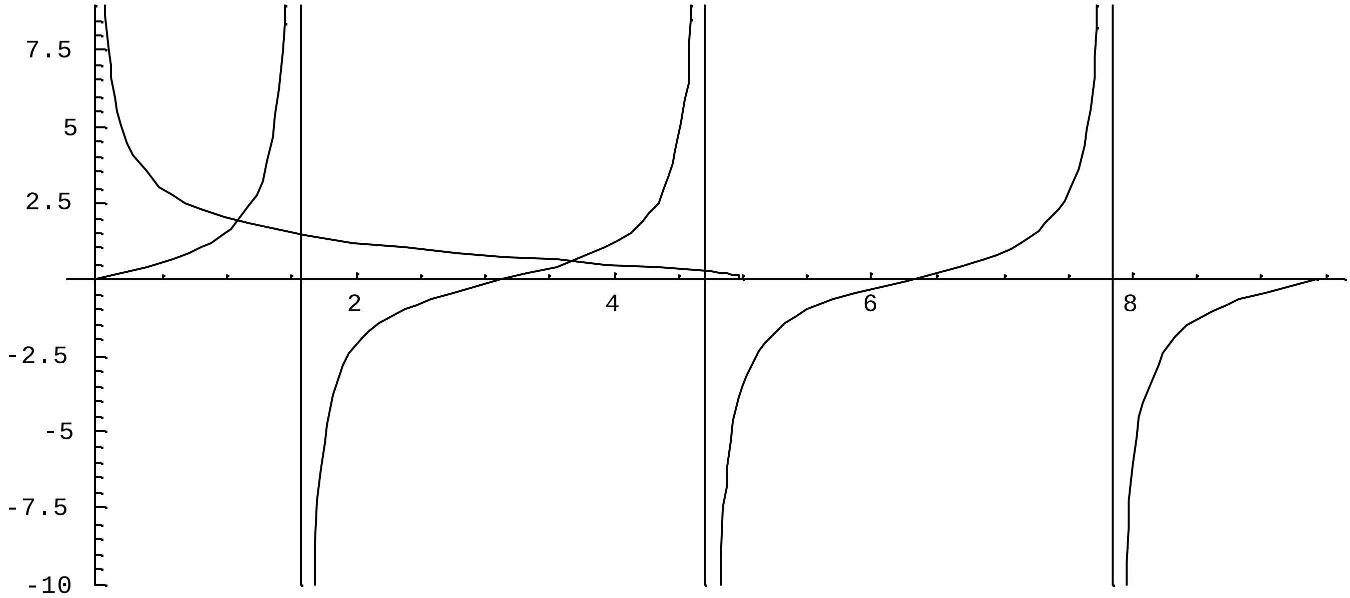
$$tg(l_1 a) = \frac{l_2}{l_1} \tag{2.13}$$

Vpeljimo sedaj nove spremenljivke, in sicer $u = a l_1$ in $u_0 = a l_0$, pri cemer je $l_0^2 = l_1^2 + l_2^2 = \frac{V_0 2m}{\hbar^2}$.
Enacbo (2.13) lahko sedaj zapišemo v brezdimenzijski obliki

$$tg(u) = \sqrt{\left(\frac{u_0}{u}\right)^2 - 1} \tag{2.14}$$

Rešitve enacbe (2.14) poišcemo graficno tako, da narišemo funkciji na obeh straneh enacbe in gledamo njuna presecišca.

Graf funkcij $tg(u)$ in $\sqrt{\left(\frac{u_0}{u}\right)^2 - 1}$. u_0 sem postavil na 5.



Na grafu se lepo vidi, da je število vezanih stanj odvisno od vrednosti u_0, se pravi od potenciala V_0 in razdalje a. V vsakem primeru pa imamo vsaj eno sodo vezano stanje.

Poglejmo si sedaj še lihe rešitve. Od Ψ_1 vzamemo samo sinus. Pri Ψ_2 pa vzamemo samo clen z negativnim eksponentom, saj zahtevamo da velja $\lim_{x \to \infty} \Psi(x) = 0$. Upoštevajoc enacbi (2.8) in (2.9) sledi

$$C sin(l_1 a) = B e^{-l_2 a} \qquad (2.15)$$

$$-l_1 C \cos(l_1 a) = -l_2 B e^{-l_2 a} \qquad (2.16)$$

Spet smo dobili sistem dveh enacb, ki ima rešitev le takrat, ko je determinanta sistema enaka nic. Sledi

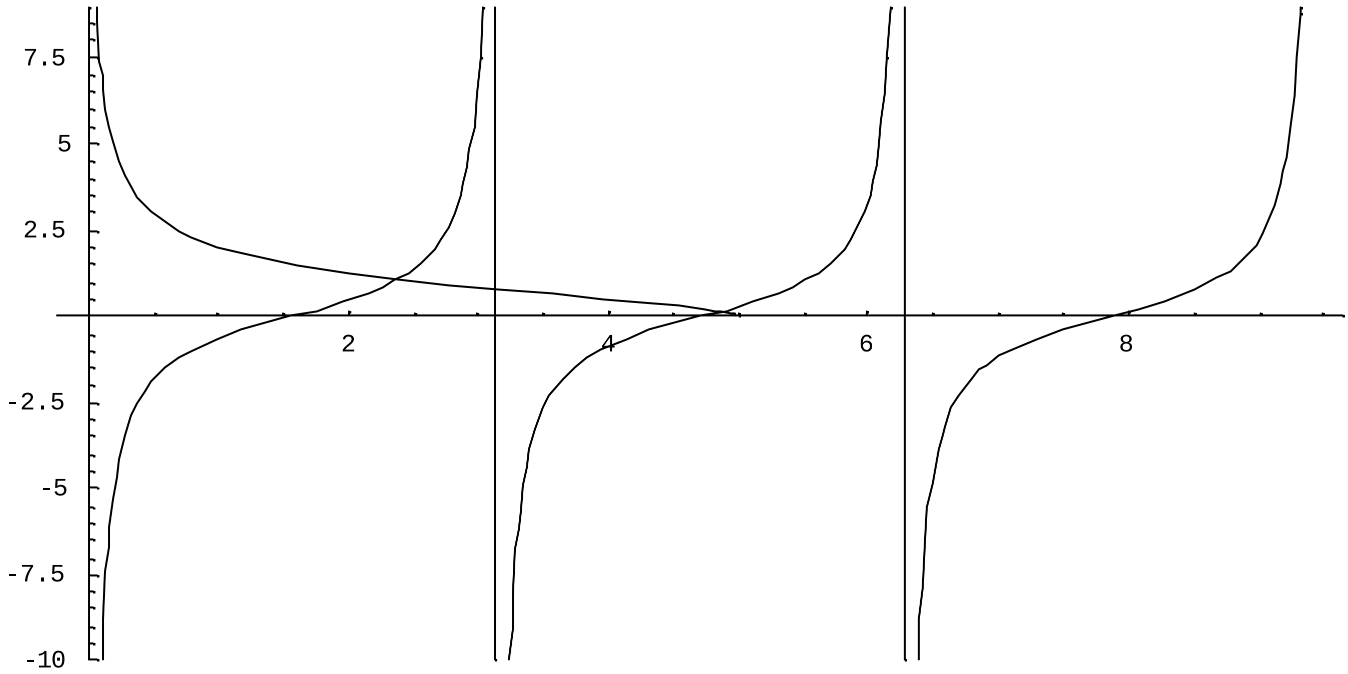
$$tg(l_1 a) = -\frac{l_1}{l_2} \qquad (2.17)$$

Kar lahko zapišemo tudi kot

$$-ctg(u) = \sqrt{\left(\frac{u_0}{u}\right)^2 - 1} \qquad (2.18)$$

Rešitve enacbe (2.18) poiščemo graficno tako, da narišemo funkciji na obeh straneh enacbe in gledamo njuna presecišca.

Graf funkcij $-ctg(u)$ *in* $\sqrt{\left(\frac{u_0}{u}\right)^2 - 1}$. u_0 sem postavil na 5.



Na grafu se lepo vidi, da je število vezanih stanj tudi v tem primeru odvisno od vrednosti u_0, se pravi od potenciala V_0 in razdalje a. Liha vezana stanja pa imamo le takrat, ko je $u_0 \geq \frac{p}{2}$.