Domača naloga iz kvantne mehanike
SIPANJE DELCEV NA POTENCIALU DVEH δ-FUNKCIJ

Vasilij Centrih

18.6.2002

1 Prepustnost takšnega potenciala

Na potencial $V(x) = \widetilde{V_0}[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$ vpada curek delcev leve strani. Zapišemo valovno funkcijo za tri območja: leva stran δ-funkcij (1), znotraj (2) in desna stran δ-funkcij (3):

$$\psi_1(x) = Ae^{ik(x+a)} + Be^{-ik(x+a)}$$
$$\psi_2(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$
$$\psi_3(x) = Fe^{ik(x-a)}$$

Prepustnost je definirana kot $T = \frac{F^*F}{A^*A}$. Imamo štiri robne pogoje:

$$\psi_1(-a) = \psi_2(-a) \tag{1}$$
$$\psi_2(a) = \psi_3(a) \tag{2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(-a) - \frac{\partial}{\partial x}\psi_2(-a) = -\frac{2m\widetilde{V_0}}{\hbar^2}\psi_1(-a) \tag{3}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(a) - \frac{\partial}{\partial x}\psi_3(a) = -\frac{2m\widetilde{V_0}}{\hbar^2}\psi_3(a) \tag{4}$$

Iz teh pogojev dobimo naslednje enačbe:

$$A + B = Ce^{-ika} + De^{ika} \tag{5}$$
$$F = Ce^{ika} + De^{-ika} \tag{6}$$
$$ikaA - ikaB - ikaCe^{-ika} + ikaDe^{ika} = -\frac{2m\widetilde{V_0}a}{\hbar^2}(A+B) \tag{7}$$
$$ikaCe^{ika} - ikaDe^{-ika} - ikaF = -\frac{2m\widetilde{V_0}a}{\hbar^2}F \tag{8}$$

Označimo $ka = x$ in $\frac{2m\widetilde{V_0}a}{\hbar^2} = x_0$ in poskusimo dobiti ulomek $\frac{F}{A}$ $(T = |\frac{F}{A}|^2)$.
Enačbe od 5 do 8 se glasijo:

$$A + B = Ce^{-ix} + De^{ix} \tag{9}$$
$$F = Ce^{ix} + De^{-ix} \tag{10}$$
$$ixA - ixB - ixCe^{-ix} + ixDe^{ix} = -x_0(A+B)$$

$$ixCe^{ix} - ixDe^{-ix} - ixF = -x_0F$$

Zadnji dve enačbi še malo preuredimo:

$$A(1 - \frac{ix_0}{x}) + B(-1 - \frac{ix_0}{x}) = Ce^{-ix} - De^{ix} \tag{11}$$

$$F(1 + \frac{ix_0}{x}) = Ce^{ix} - De^{-ix} \tag{12}$$

Sedaj najprej seštejemo in nato še odštejemo enačbi 10 in 12: in tako dobimo vrednosti konstant C in D izražene z F:

$$C = (1 + \frac{ix_0}{2x})e^{-ix}F$$

$$D = -(\frac{ix_0}{2x})e^{ix}F$$

Konstanti C in D vstavim v enačbo 9 in izrazim konstanto B z A in F:

$$B = -A + (1 + \frac{ix_0}{2x})e^{-2ix}F - (\frac{ix_0}{2x})e^{2ix}F$$

Vse tri B, C in D vstavim v enačbo 11 in po nekaj korakih izrazim najprej ulomek $\frac{A}{F}$:

$$\frac{A}{F} = e^{-2ix} - \frac{ix_0^2}{4x^2}\sin 2x \tag{13}$$

$$|\frac{A}{F}|^2 = 1 + \frac{x_0^2}{4x^2}\sin^2 2x + (\frac{x_0}{2x})^4 \sin^2 2x \tag{14}$$

In končno rezultat za prepustnost:

$$T = |\frac{F}{A}|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{x_0}{2x})^2(1 + (\frac{x_0}{2x})^2)\sin^2 2x} \tag{15}$$

2 Prepustnost v okolici resonance kvazivezanih stanj ($T \simeq 1$)

Energije, pri katerih je prepustnost T=1 dobimo iz prejšne enačbe, kjer vidimo, da mora biti $\sin 2x = 0$. Torej $2x = n\pi$ oziroma $k = \frac{n\pi}{2a}$ in ustrezne energije so

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{8ma^2} = \frac{\hbar^2 x_n^2}{8ma^2} \tag{16}$$

ki ustrezajo energijam neskončne potencialne jame. V okolici teh točk vzamemo za $x = \frac{n\pi}{2} + \varepsilon$ in približek $\sin^2(n\pi \pm 2\varepsilon) \approx (\pm 2\varepsilon)^2 = 4\varepsilon^2$ in nastavimo enačbo takole:

$$T = \frac{1}{1 + (\frac{x_0}{n\pi})^2(1 + (\frac{x_0}{n\pi})^2)4\varepsilon^2}$$

Pri čemer upoštevamo približek $x_0 \gg 1$ in zanemarimo 1 v oklepaju v imenovalcu in dobimo za prepustnost

$$T = \frac{1}{1 + 4(\frac{x_0}{n\pi})^4\varepsilon^2} \tag{17}$$

kar nam da lorentzovo funkcijo, katere širina resonančnega vrha (razpolovna širina na polovični višini vrha) je podana kot $\Gamma_{n_x} = (\frac{n\pi}{x_0})^2$ ($\Gamma = 2\varepsilon$ pri $T = 0.5$).

Radi bi ugotovili, če je razpolovna širina prepustnosti povezana z razpadnim časom kvazivezanih stanj. Veljalo naj bi $\Gamma_{n_E}\tau_n \geq \frac{\hbar}{2}$, če je Γ_{n_E} zapisana v energijski skali. Iz enabe 16 dobimo zvezo med spremembama E_n in x_n:

$$\Delta E_n = (\frac{\hbar^2}{8ma^2}) \cdot 2x_n \Delta x_n$$

oziroma

$$\Gamma_{n_E} = (\frac{\hbar^2}{8ma^2}) \cdot 2x_n \Gamma_{n_x} \tag{18}$$

Razpadni čas kvazivezanih stanj je

$$\tau_n = \frac{4ma^2x_0^2}{\hbar n^3\pi^3} = \frac{16m^3a^4\widetilde{V_0}^2}{\hbar^5 n^3\pi^3} \tag{19}$$

Poglejmo sedaj produkt $\Gamma_{n_E} \cdot \tau_n$:

$$\Gamma_{n_E} \cdot \tau_n = (\frac{\hbar^2 2x_n}{8ma^2} \cdot \frac{n^2\pi^2}{x_0^2}) \cdot \frac{16m^3a^4\widetilde{V_0}^2}{\hbar^5 n^3\pi^3} = \frac{\hbar^6 n^3\pi^3}{16m^3a^4\widetilde{V_0}^2} \cdot \frac{16m^3a^4\widetilde{V_0}^2}{\hbar^5 n^3\pi^3} = \hbar \tag{20}$$

Torej dobimo za rezultat $\Gamma_{n_E} \cdot \tau_n = \hbar$.