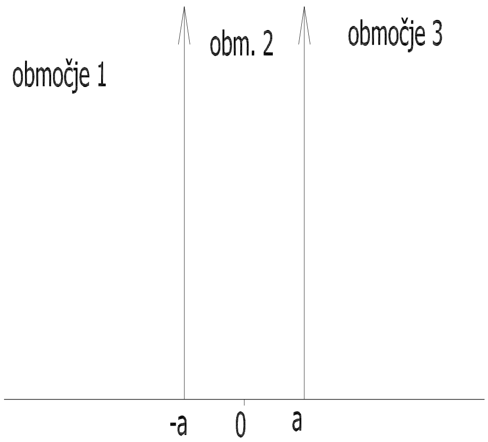
POTENCIAL DVEH δ FUNKCIJ

URBAN SIMONČIČ

1. Naloga

Imamo sledeč potencial: $V(x) = \tilde{V_0}[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$ pri čemer vemo, da je $\tilde{V_0} < 0$. Za lažji izračun celotno območje razdelimo na tri območja; območje pred prvo δ funkcijo, območje med obema δ funkcijama in območje za drugo δ funkcijo.



Slika 1. Skica potenciala. Območje razdeljujeta dve δ funkciji na tri območja.

2. Rešitev

Nastavek za valovne funkcije na posameznih območjih je:

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{1}$$

$$\psi_2 = Ce^{ikx} + De^{-ikx} \tag{2}$$

$$\psi_3 = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} \tag{3}$$

Ker morajo biti valovne funkcije normirane, je potreben pogoj da so povsod omejene, zato velja $A = 0$ in $G = 0$.

Ker vemo tudi, da je energija manjša od nič, imamo opravka z vezanimi stanji in je valovni vektor enak:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = i\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} = iq \tag{4}$$

Ker je potencial simetričen, so valovne funkcije lahko sode ali lihe.

2.1. Primer za sode valovne funkcije.

Če so valovne funkcije sode, se enačbe 1, 2 in 3 spremenijo v

$$\psi_1 = Be^{qx} \tag{5}$$

$$\psi_2 = I\cosh qx \tag{6}$$

$$\psi_3 = Be^{-qx} = \tilde{F}e^{-q(x-a)} \tag{7}$$

Pri tem je upoštevano, da je $B = F$, kar velja zaradi sodosti valovne funkcije.

Da se določi neznane konstante pri valovnih funkcijah, je potrebno upoštevati robne pogoje:

$$\psi_2(a) = \psi_3(a) \tag{8}$$

$$\psi_3'(a) - \psi_2'(a) = \frac{2m\tilde{V}}{\hbar^2}\psi(a) \tag{9}$$

Seveda se enake robne pogoje upošteva pri $x = -a$ in se dobi simetrične enačbe.

Ko v 8 vstavim 6 in 7, dobim:

$$I\cosh(qa) = \tilde{F}e^{-q(a-a)} = \tilde{F} \tag{10}$$

in

$$-q\tilde{F} - Iq\sinh(qa) = \tilde{F}\frac{2m\tilde{V}}{\hbar^2} \tag{11}$$

Iz 10 dobimo $qa = arcosh(\frac{\tilde{F}}{I})$ oziroma:

$$\cosh(qa) = \frac{\tilde{F}}{I} \tag{12}$$

iz 11 pa:

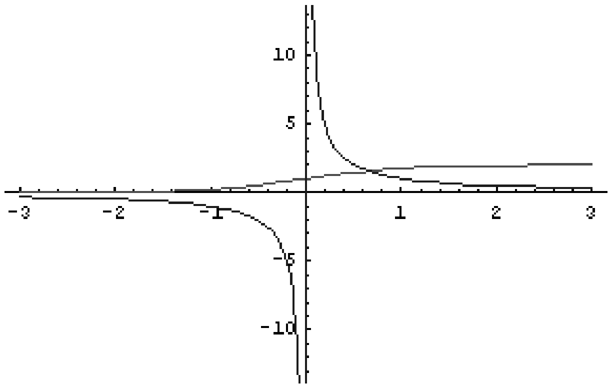
$$\tilde{F}(1 + \frac{2m\tilde{V}}{q\hbar^2}) = -I\sinh(qa) \tag{13}$$

Iz 12 in 13 dobimo:

$$\cosh(qa)(1 + \frac{2m\tilde{V}}{q\hbar^2}) = -\sinh(qa) \tag{14}$$

Enačba 14 pa nam da;

$$1+\tanh(qa) = -\frac{2m\tilde{V}}{q\hbar^2} \tag{15}$$



SLIKA 2. Graf leve in desne strani enačbe 15, kjer je argument qa, rešitev pa je presečišče

2.2. **Primer za lihe valovne funkcije.**

Če so valovne funkcije lihe, se enačbe 1, 2 in 3 spremenijo v

$$\psi_1 = -\tilde{F}e^{q(x+a)} \tag{16}$$

$$\psi_2 = \tilde{G}\sinh qx \tag{17}$$

$$\psi_3 = \tilde{F}e^{-q(x-a)} \tag{18}$$

Da se določi neznane konstante pri valovnih funkcijah, je potrebno upoštevati robne pogoje. Postopek je enak, kot prej, zato ga ne bom ponavljal v celoti. Končni robni pogoj na desni δ funkciji je:

$$\tilde{G}\sinh(qa) = \tilde{F} \tag{19}$$

in

$$-q\tilde{F} - q\tilde{G}\cosh(qa) = \tilde{F}\frac{2m\tilde{V}}{\hbar^2} \tag{20}$$

Iz 19 dobimo :

$$\sinh(qa) = \frac{\tilde{F}}{\tilde{G}} \tag{21}$$

iz 20 pa:

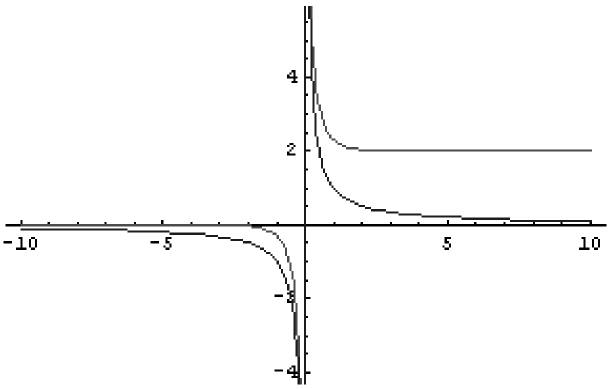
$$\tilde{F}(1+\frac{2m\tilde{V}}{q\hbar^2}) = \tilde{G}\cosh(qa) \tag{22}$$

Iz 21 in 22 dobimo:

$$\sinh(qa)(1+\frac{2m\tilde{V}}{q\hbar^2}) = \cosh(qa) \tag{23}$$

Enačba 23 pa nam da;

$$1+\coth(qa) = -\frac{2m\tilde{V}}{q\hbar^2} \tag{24}$$



Slika 3. Graf leve in desne stran enačbe 24, kjer je argument qa, rešitev pa je presečišče

Da ugotovimo, če obstaja presečišče na grafu 3, moramo najprej razviti $\coth(qa)$ v Laurentovo vrsto. Dobimo: $\coth(qa) = \frac{1}{qa} + \frac{qa}{3} + o((qa)^2)$. Iz tega sklepamo, da so možni trije primeri. Če je $\frac{2ma\tilde{V}}{\hbar^2} > 1$ bo presečišče v prvem kvadrantu, če je $\frac{2ma\tilde{V}}{\hbar^2} = 1$, bo presečišče v singularni točki $qa = 0$, sicer pa bo presečišče v tretjem kvardantu. Rešitev v tretjem kvadrantu fizikalno ni zanimiva.

Ko se določi q (čeprav kot rešitev transcendentne enačbe), se po enačbi 4 določi možna energijska stanja.

3. Rešitev za $\tilde{V} > 0$ in za pozitivne energije

Če je $\tilde{V} > 0$, ni pravih vezanih stanj, pač pa so kvazivezana stanja. Razlog zato je pozitivna energija. Zaradi pozitivne energije se spet vrnemo na k, namesto q enačba 4.

V prejšnjih enačbah torej zamenjamo q z $-ik$ in dobimo za lihe valovne funkcije enačbe:

$$1+\coth(-ika) = 1-\coth(ika) = \frac{2m\tilde{V}}{ik\hbar^2} \tag{25}$$

oziroma:

$$1+i\cot(ka) = \frac{2m\tilde{V}}{ik\hbar^2} \tag{26}$$

za sode valovne funkcije pa dobimo naslednjo enačbo:

$$1-i\tan(ka) = \frac{2m\tilde{V}}{ik\hbar^2} \tag{27}$$

za reševanje te enačbe vpeljemo $x = ka$ in $x_0 = \frac{2m\tilde{V}a}{\hbar^2}$. Situacija je nekoliko podobna neskončni potencialni jami, zato so verjetno podobne tudi rešitve.

3.1. **Lihe valovne funkcije.** Za lihe rešitve za neskončno potencialno jamo vemo: $x_n = n\pi$, zato sklepamo, da bo v našem primeru $x_n = n\pi + \epsilon = n\pi + \epsilon' + i\epsilon''$.

Iz enačbe 26 sledi:

$$1 + i\cot(n\pi + \epsilon' + i\epsilon'') = -i\frac{x_0}{n\pi} \tag{28}$$

Ko kotangens razvijemo do prvega reda okrog $n\pi$ oziroma okrog 0, dobimo:

$$1 + i\frac{1}{\epsilon' + i\epsilon''} = -i\frac{x_0}{n\pi} \tag{29}$$

enačbo 29 lahko nekoliko lepše zapišemo kot:

$$\epsilon' + i\epsilon'' = -\frac{i}{1 + i\frac{x_0}{n\pi}} = -\frac{i(1 - i\frac{x_0}{n\pi})}{1 + \frac{x_0^2}{n^2\pi^2}} = -\frac{i + \frac{x_0}{n\pi}}{1 + \frac{x_0^2}{n^2\pi^2}} \tag{30}$$

Tako dobimo $x_n = k_n a = n\pi - \frac{i + \frac{x_0}{n\pi}}{1 + \frac{x_0^2}{n^2\pi^2}}$, lastna energija pa je $E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E_n' - iE_n''$.

Energijo, izražena z začetnimi pogoji je (pri tem 1 v imenovalcu za x_n zanemarimo):

(31)
$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a^2}(n\pi - \frac{i + \frac{x_0}{n\pi}}{x_0^2})^2 = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}(1 - \frac{n\pi i + x_0}{x_0^2})^2 = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{2ma^2}(\frac{x_0 - 1}{x_0} - \frac{n\pi i}{x_0^2})^2$$

Zanima nas le imaginarni del energije (pravzaprav negativna vrednost imag. dela energije E'') in ta je:

$$E'' = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{ma^2}\frac{n\pi}{x_0^2} = \frac{\hbar^2 n^3 \pi^3}{ma^2}\frac{1}{(\frac{2m\tilde{V}a}{\hbar^2})^2} = (\frac{\hbar^2 n\pi}{ma})^3\frac{1}{(2\tilde{V})^2} \tag{32}$$

Za lastno funkcijo vemo, da jo lahko zapišemo v obliki: $\psi(x,t) = \psi(x,0)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} = \psi(x,0)e^{-i\frac{E_n'}{\hbar}t}e^{-\frac{E_n''}{\hbar}t}$

Stanje je torej nestabilno, saj imamo eksponentno padajoč člen, v njegovem eksponentu pa razberemo razpadni čas, ki znaša $\tau = \frac{\hbar}{2E_n''} = \frac{\hbar}{2(\frac{\hbar^2 n\pi}{ma})^3\frac{1}{(2\tilde{V})^2}} = \frac{2m^3a^3\tilde{V}}{\hbar^5 n^3\pi^3}$. Dvojka v imenovalcu razpadnega časa je posledica dejstva, da gledamo spreminjanje verjetnosti (ki je $\psi\psi*$, ne pa potek valovne funkcije).

3.2. **Sode valovne funkcije.** Za sode rešitve za neskončno potencialno jamo vemo: $x_n = (n + \frac{1}{2})\pi$, zato sklepamo, da bo v našem primeru $x_n = (n + \frac{1}{2})\pi + \epsilon = (n + \frac{1}{2})\pi + \epsilon' + i\epsilon''$.

Iz enačbe 27 sledi:

$$1 - i\tan((n + \frac{1}{2})\pi + \epsilon' + i\epsilon'') = -i\frac{x_0}{n\pi} \tag{33}$$

Ko tangens razvijemo do prvega reda okrog $n\pi$ oziroma okrog 0, dobimo:

$$1 + i\frac{1}{\epsilon' + i\epsilon''} = -i\frac{x_0}{(n + \frac{1}{2})\pi} \tag{34}$$

Enačba 34 je zelo podobna enačbi 29 pri lihih funkcijah, zato je dovolj, da v končnem rezultatu $n\pi$ zamenjam z $(n + \frac{1}{2})\pi$ in dobim $\tau = \frac{2m^3a^3\tilde{V}}{\hbar^5(n + \frac{1}{2})^3\pi^3}$