Povprečja koordinat in impulzov za valovni paket

Jernej Mravlje

20.marec 2002

1 Navodilo naloge

Oglej si valovno funkcijo

$$\psi(x,t) = A\exp(-\frac{x^2}{4\sigma^2})\exp(ikx)$$

ter določi zanjo pričakovane vrednosti x, x^2, p, p^2.

2 Reševanje

Najprej iz zahteve $\int \psi^*\psi = 1$ določimo normalizacijsko konstanto A:

$$1 = A^*A\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2/2\sigma^2)\mathrm{d}x$$

$$1 = A^*A\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2/2\sigma^2)\mathrm{d}(x/\sqrt{2}\sigma)$$

Pri izračunu tega integrala (in naslednjih) upoštevamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n}\exp(-x^2)\mathrm{d}x = \Gamma(n+1/2)$$

in

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Zdaj integrali ne bodo več problem! Nadaljujmo:

$$1 = A^*A\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}exp(-u^2)\mathrm{d}u = A^*A\sqrt{2}\sigma\sqrt{\pi}$$

A torej lahko vzamemo za realen in po korenjenju dobimo normaliziran valovni paket:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{x^2}{4\sigma^2})\exp(ikx)$$

Zdaj lahko začnemo računati povprečja oz. pričakovane vrednosti, najprej $< x >$

$$< x >= \int\psi^*x\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\exp(-x^2/2\sigma^2)\mathrm{d}x$$

ki je enak 0 zaradi integriranja lihe funkcije po sodem intervalu. Nadaljujmo z $< x^2 >$:

$$< x^2 >= \int\psi^*x^2\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\exp(-x^2/2\sigma^2)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\sqrt{2\sigma^2})^3}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\exp(-u^2)\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2\sigma^2})^3}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\Gamma(3/2) = \sigma^2$$

kar nas ne preseneti pretirano, saj je to za Gaussovo porazdelitev znan rezultat. Velja še

$$\sigma_x^2 =< x^2 > - < x >^2 = \sigma^2$$

Oglejmo si še pričakovane vrednosti operatorja gibalne količine <p>. Velja $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ Potrebovali bomo

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{x^2}{4\sigma^2})\exp(ikx)(ik - x/2\sigma^2)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}\frac{\partial}{\partial x}[\exp(-\frac{x^2}{4\sigma^2})\exp(ikx)(ik - x/2\sigma^2)] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{x^2}{4\sigma^2})\exp(ikx)(-k^2 + x^2/4\sigma^4 - ikx/\sigma^2 - 1/2\sigma^2)$$

Zdaj pa ni več daleč do konca. Le pogumno naprej!

$$< p >= \int \psi^*(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi) = ik(-i\hbar)\int \psi^*\psi + B < x >= \hbar k$$

Prvi člen je sorazmeren z normalizacijo, drugi pa s pričakovano vrednostjo koordinate, tako se izognemo ponovnemu računanju. Tudi spodaj se zadeve lotimo podobno.

$$< p^2 >= \int \psi^*(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi) = (\hbar^2k^2 + \hbar^2/2\sigma^2)\int \psi^*\psi - \hbar^2/4\sigma^4 < x^2 > + C < x >=$$

$$\hbar^2(k^2 + 1/2\sigma^2 - 1/4\sigma^2) = \hbar^2k^2 + \hbar^2/4\sigma^2$$

Ta rezultat bo dobil preglednejši pomen, če mu odštejemo kvadrat pričakovane gibalne količine.

$$\sigma_p^2 =< p^2 > - < p >^2 = \hbar^2/4\sigma^2$$

Produkt mer za nedoločenost gibalne količine in koordinate pa je:

$$\sigma_p\sigma_x = \hbar/2$$

Kar je tudi iz teorije znana minimalen možen produkt ustreznih količin.