Poročilo vaje (18.2, Franc Schwabl, str. 349)

Imamo potencial:

$$V(r) = -\lambda \frac{h^2}{2m} \delta(r-a)$$

Definiramo funkciji $\psi_1(r)$ za $r < a$ in $\psi_2(r)$ za $r > a$;
Ker gre za sferično simetrični potencial kratkega dosega bomo rešitve iskali med Besslovimi (j_1), Neumannovimi (n_1) sferičnimi funkcijami in njihovimi linearnimi kombinacijami Hanklovimi funkcijami, $(h_1(r) = j_1(r) + i n_1(r))$:

Nastavimo

$$\psi_1(r) = A j_1(r)$$

$$\psi_2(r) = \frac{1}{2}[h_1^*(kr) + e^{2i\delta_1} h_1(kr)]$$

Veljati morajo robni pogoji pri $r = a$:

$$\psi_1(a) = \psi_2(a)$$

$$\psi_1'(a) - \psi_2'(a) = \frac{2 V_0 \psi(a) m}{\hbar^2}$$

Definirajmo še: $\alpha_1 \equiv \frac{d \log(\psi_1(r))}{dr}$, ki jo bomo potrebovali pri kasnejši obravnavi.

(a) Poiščimo sipalne faze $\delta_1(k)$:

Iz robnih pogojev

$$\left\{ \begin{array}{c} \psi_1'(a) = \frac{2 V_0 \psi(a) m}{\hbar^2} + \psi_2'(a) \\ \psi_1(a) = \psi_2(a) \end{array} \right. \quad /:$$

Upoštevamo še $\alpha_1 \equiv \frac{\psi_1'(a)}{\psi_1(a)}$ in pa $V_0 = -\frac{\lambda \hbar^2}{2m}$, pokrajšamo ter dobimo:

$$\alpha_1 = -\lambda + \frac{\psi_2'(a)}{\psi_2(a)}$$

Vstavimo $\psi_2(r) = \frac{1}{2}[h_1^*(kr) + e^{2i\delta_1} h_1(kr)]$ in računamo:

$$\alpha_1 + \lambda = \left(\frac{\frac{d}{dr}[h_1^*(kr) + e^{2i\delta_1} h_1(kr)]}{[h_1^*(kr) + e^{2i\delta_1} h_1(kr)]} \right)_{r=a}$$

Olajšamo si delo z $j_1 = j_1(kr)$ in pa $n_1 = n_1(kr)$

$$(\alpha_1 + \lambda)[j_1 - i n_1 + e^{2i\delta_1}(j_1 + i n_1)]_{r=a} = \left[\frac{dj_1}{dr} - i\frac{dn_1}{dr} + e^{2i\delta_1}\left(\frac{dj_1}{dr} + i\frac{dn_1}{dr}\right)\right]_{r=a}$$

$$i\frac{(e^{2i\delta_1} - 1)}{(e^{2i\delta_1} + 1)} = i\mathrm{Tanh}[i\delta_1] = \mathrm{Tan}[\delta_1] = \left[\frac{\frac{dj_1}{dr} - (\alpha_1 + \lambda) j_1}{\frac{dn_1}{dr} - (\alpha_1 + \lambda) n_1}\right]_{r=a}$$

Vstavimo še $\alpha_1 \equiv \frac{\psi_1'(a)}{\psi_1(a)} = k\frac{j_1'}{j_1}$, $\frac{dj_1}{dr} = k j_1'$ in $\frac{dn_1}{dr} = k n_1'$ pa dobimo:

$$\mathrm{Tan}[\delta_1] = \left[\frac{\lambda j_1^2}{\lambda j_1 n_1 - k(j_1 n_1' - j_1' n_1)}\right]_{r=a}$$

(b) Sipalni presek za s - waves:

Ker imamo sferično simetrični potencial kratkega dosega lahko uporabimo teorijo parcialnih valovanj (18.3 Partial Waves, str. 329; Schwabl)

Takoj sledi :

$$\sigma_l = \frac{4\pi\,(2\,l+1)}{k^2}\,\mathrm{Sin}^2[\delta_l]$$

Vstavimo δ_l in dobimo :

$$\sigma_l = \frac{4\pi\,(2\,l+1)}{k^2}\,\mathrm{Sin}^2\Big[\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{\lambda j_l{}^2}{\lambda j_l\,n_l - k\,(j_l\,n_l' - j_l'\,n_l)}\Big]_{r=a}\Big]$$

Ker gre za s - valove velja l = 0, in pa po definicijah

$$j_0\,(\rho) = \frac{\mathrm{Sin}[\rho]}{\rho}$$

$$n_0\,(\rho) = -\frac{\mathrm{Cos}[\rho]}{\rho}$$

Vstavimo in poenostavimo pa dobimo naš presek :

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}\,\mathrm{Sin}^2\Big[\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{\lambda j_0{}^2}{\lambda j_0\,n_0 - k\,(j_0\,n_0' - j_0'\,n_0)}\Big]\Big] \Rightarrow$$

$$\sigma_0 = \frac{8\pi\lambda^2\,\mathrm{Sin}^4[ka]}{k^2\,(2\,k^2 + \lambda^2 - \lambda^2\,\mathrm{Cos}[2\,ka] + 2\,k\,\lambda\,\mathrm{Sin}[2\,ka])}$$

(c) Iščemo pogoj za maximum sipalnega preseka za s - valove :

Imamo, za l = 0 :

$$\mathrm{Tan}[\delta_0] = \Big[\frac{\frac{dj_0}{dr} - (\alpha_0 + \lambda)\,j_0}{\frac{dn_0}{dr} - (\alpha_0 + \lambda)\,n_0}\Big]_{r=a}$$

Do resonance bo prišlo, ko bo $\delta_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow$

$$\frac{dn_0}{dr} - (\alpha_0 + \lambda)\,n_0 = 0$$

Vstavimo vrednosti za n_0 in α_0 :

$$k\,\frac{k\,a\,\mathrm{Sin}[k\,a] + \mathrm{Cos}[k\,a]}{(k\,a)^2} + \frac{k\,a\,\mathrm{Cos}^2[k\,a] - \mathrm{Sin}[k\,a]\,\mathrm{Cos}[k\,a]}{k\,a\,\mathrm{Sin}[k\,a]} + \frac{\lambda\,\mathrm{Cos}[k\,a]}{k} = 0$$

Malce pokrajšamo pa dobimo naš pogoj :

$$\mathrm{Sin}[k\,a]\,\mathrm{Cos}[k\,a] = -\frac{k}{\lambda}$$

$$\mathrm{Sin}[2\,k\,a] = -\frac{2\,k}{\lambda}$$

(d) Ob pogojih g >> π in ka << g iščemo maximume :

Pogoj v bistvu ne pove veliko. Rešujemo primer $\left(\frac{dn_1}{dr} - (\alpha_1 + \lambda)\,n_1\right)_{r=a} = 0$

Če ignoriramo pogoje in vstavimo kar splošno vrednost Neumannove funkcije, se zadeva zelo zakomplicira. Zato sem se omejil na 3 možnosti :

(d .1) Če se omejimo na s - valove, potem je naloga (in rezultat) identična nalogi (c).

(d .2) Če upoštevamo, da je k a majhen (kar iz pogoja ni razvidno), potem lahko vstavimo :

Na splošno za $\rho \to 0$:

$$j_l(\rho) = \frac{\rho^l}{1*3*5*...*(2l+1)}$$

$$n_l(\rho) = \frac{1*3*5*...*(2l-1)}{\rho^{l+1}}$$

V našem primeru je $\rho = k\,a$ in :

$$\mathrm{Tan}[\delta_l] = \frac{(2l+1)}{[(2l+1)!!]^2}\,(k\,a)^{2l+1}\,\frac{l - a\,(\alpha_l + \lambda)}{l + 1 + a\,(\alpha_l + \lambda)}$$

Pogoj za resonanco postane $l + 1 + a\,(\alpha_l + \lambda) = 0$, $\delta_l\,(k) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

Če v pogoj zopet vstavimo še $\alpha_l =$
$k\,\frac{j_l'}{j_l}$ in j_l ter j_l' zopet nadomestimo z izrazi za majhen $ka \to 0$
sledi :

$$l + 1 + k\,a\,\frac{l}{k\,a} + a\,\lambda = 0 \text{ in pa } 2\,l + 1 = -a\,\lambda$$

Vidimo da pogoj za maximum tu sploh ni odvisen od k. V prid temu postopku govori dejstvo, da v naslednji nalogi (ki naj bi bila podvržena istim pogojem) izpeljemo Breit - Wignerjeva formulo, kar pa je mogoče le ob upoštevanju da je k a majhen.

(d .3) Tukaj spet začnemo z resonančnim pogojem $l + 1 + a\,(\alpha_l + \lambda) = 0$, le da tokrat v ta izraz za α_l vstavimo asimptotsko formulo za j_l :

$$j_l(\rho) = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{Sin}\left[\rho - \frac{l\,\pi}{2}\right]$$

Nato dobimo :

$$\alpha_l = k\,\frac{j_l'}{j_l} = k\,\mathrm{Tan}^{-1}\left[k\,a - \frac{l\pi}{2}\right] - \frac{1}{a}$$

Kar lahko vstavimo v resonančni pogoj pa dobimo :

$$l + 1 + a\left(k\,\mathrm{Tan}^{-1}\left[k\,a - \frac{l\pi}{2}\right] - \frac{1}{a} + \lambda\right) = 0$$

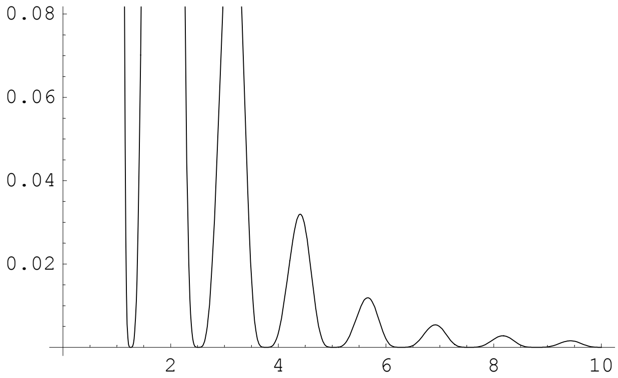
$$\mathrm{Tan}^{-1}\left[k\,a - \frac{l\pi}{2}\right] = -\frac{a\,\lambda + l}{k\,a}$$

Ta pogoj izgleda lepo in pristop ima svojo analogijo v nalogi iz knjige, kjer smo obravnavali globoko potencialno jamo ob majhni energiji ($k\,a \to 0$) (Schwabl 18.8, str. 338). Problem je, da je tu težje fizikalno opravičiti uporabo asimptotske formule.

(e) Da imamo ostre in široke resonance najlažje pokažemo, če na primeru s - valov σ_0 narišemo

```
λ = 1;
a = 2.5;
```

$$\text{Plot}\left[\frac{8\,\pi\,\lambda^2\,\text{Sin}[a\,k]^4}{k^2\,(2\,k^2+\lambda^2-\lambda^2\,\text{Cos}[2\,a\,k]+2\,k\,\lambda\,\text{Sin}[2\,a\,k])},\ \{k,\ 0,\ 10\}\right]$$



- Graphics -

λ določa višino potenciala, vrednost a pa njegovo oddaljenost od izhodišča.
Vidimo, da je sipalni presek velik, dokler je energija majhna ($k \to 0$)
Ko energijo povečujemo pride najprej do visokih - ostrih resonanc kasne pa še do širokih - nižjih;
Če energijo dovolj povečamo sipalni presek pada proti 0.

Visoke in ostre resonance pa lahko opazimo že iz računa, tudi če ne gre za s - valove, če v formulo za $\text{Tan}[\delta_l]$ vstavimo vrednosti Besslovih in Neumannovih funkcij za nizke vrednosti, kot v nalogi (d) :

$$\text{Tan}[\delta_l] = \frac{(2\,l+1)}{[(2\,l+1)\,!!]^2}\,(k\,a)^{2\,l+1}\,\frac{l-a\,(\alpha_l+\lambda)}{l+1+a\,(\alpha_l+\lambda)}$$

Pogoj za resonanco je zopet $l+1+a\,(\alpha_l+\lambda)=0$, $\delta_l\,(k)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$,

sipalni presek v resonanci pa : $\sigma_l\,(k)=\frac{4\,\pi\,(2\,l+1)}{k^2}$

Za druge vrednosti je $\delta_l \sim (k\,a)^{2\,l+1}$ kar nam bo pri višjih l prineslo ostre resonance.

(Presek $\sigma_l = \frac{4\,\pi\,(2\,l+1)}{k^2}\,\text{Sin}^2[\delta_l]$ bo v okolici resonance hitro narasel in nato znova padel)

Za dokaz Breit - Wignerjeve formule je dovolj vzeti formulo okoli ostre resonance :

$$\text{Tan}[\delta_l] = \frac{(2\,l+1)}{[(2\,l+1)\,!!]^2}\,(k\,a)^{2\,l+1}\,\frac{l-a\,(\alpha_l+\lambda)}{l+1+a\,(\alpha_l+\lambda)}$$

in razviti okoli $E \sim E_R$ pogoj $l+1+a\,(\alpha_l\,(E_R)+\lambda)=0$

$$\text{Tan}[\delta_l] = \frac{2\,l+1}{[(2\,l+1)\,!!]^2}\,(k\,a)^{2\,l+1}\,\frac{l-a\,(\alpha_l+\lambda)}{l+1+a\,(\alpha_l\,(E_R)+\alpha_l'\,(E_R)\,[E-E_R]+\lambda)}+\vartheta\,((ka)^{2\,l+1})$$

$$l+1+a\,(\alpha_l\,(E_R)+\lambda)=0$$
$$l-a\,(\alpha_l+\lambda)=2\,l+1$$

Krajšamo, vpeljemo $\gamma = -\frac{1}{[(2l-1)!!]\, a\, \alpha_l'(E_R)}$ in dobimo :

$$\mathrm{Tan}[\delta_l] = -\frac{(k a)^{2l+1}\gamma}{E-E_R} + \vartheta((ka)^{2l+1})$$

Ko to kvadriramo odpade ostanek ϑ in dobimo :

$$\mathrm{Sin}^2[\delta_l] = \left(\frac{(k a)^{2l+1}\gamma}{E-E_R}\right)^2 (1-\mathrm{Sin}^2[\delta_l])$$

$$\mathrm{Sin}^2[\delta_l]\left(1+\left(\frac{(k a)^{2l+1}\gamma}{E-E_R}\right)^2\right) = \left(\frac{(k a)^{2l+1}\gamma}{E-E_R}\right)^2$$

$\mathrm{Sin}^2[\delta_l] = \frac{((k a)^{2l+1}\gamma)^2}{(E-E_R)^2+((k a)^{2l+1}\gamma)^2}$ od prej pa še vemo da je $\sigma_l = \frac{4\pi(2l+1)}{k^2}\mathrm{Sin}^2[\delta_l] \Rightarrow$

$\sigma_l = \frac{4\pi(2l+1)}{k^2}\frac{((k a)^{2l+1}\gamma)^2}{(E-E_R)^2+((k a)^{2l+1}\gamma)^2}$, kar pa je ravno Breit - Wignerjeva formula.

(f) Iščemo pole $e^{2 i\delta_l}-1$ na negativni realni E - osi :

Začnemo z $\alpha_l+\lambda = \left(\frac{\frac{d}{dr}[h_l^*(kr)+e^{2i\delta_l}h_l(kr)]}{[h_l^*(kr)+e^{2i\delta_l}h_l(kr)]}\right)_{r=a}$ iz naloge (a)

Upoštevamo $h_l(r) = j_l(r) + i n_l(r)$ in pa $h_l^*(r) = j_l(r) - i n_l(r)$ pa dobimo :

$$\alpha_l+\lambda = \left(\frac{\frac{dj_l}{dr} - i\frac{dn_l}{dr} + e^{2i\delta_l}\left(\frac{dj_l}{dr}+i\frac{dn_l}{dr}\right)}{j_l - i n_l + e^{2i\delta_l}(j_l+i n_l)}\right)_{r=a}$$

Zgoraj dodamo $+2\frac{dj_l}{dr} - 2\frac{dj_l}{dr}$, spodaj pa $2 j_l - 2 j_l$:

$$\alpha_l+\lambda = \left(\frac{2\frac{dj_l}{dr}+\frac{dh_l}{dr}(e^{2i\delta_l}-1)}{2 j_l + h_l(e^{2i\delta_l}-1)}\right)_{r=a} \Rightarrow$$

$$e^{2i\delta_l}-1 = \left(\frac{2\left(\frac{dj_l}{dr}-j_l(\alpha_l+\lambda)\right)}{h_l(\alpha_l+\lambda)-\frac{dh_l}{dr}}\right)_{r=a}$$

Pole bomo torej iskali prek pogoja : $h_l(\alpha_l+\lambda) - \frac{dh_l}{dr} = 0$

Vstavimo $h_l = j_l + i\, n_l$, $\alpha_l = k\frac{j_l'}{j_l}$ in izenačimo Im in Re del :

$$k(j_l' + i n_l') = (\alpha_l+\lambda)(j_l + i n_l)$$

$$k j_l' = \left(k\frac{j_l'}{j_l}+\lambda\right) j_l$$

$$k n_l' = \left(k\frac{j_l'}{j_l}+\lambda\right) n_l$$

Obe enačbi morata biti izpolnjeni, če naj imamo v točki pol.

Prva nam da :

$$(\lambda\, j_l)_{r=a} = 0$$

Pole moramo torej iskati med ničlami Besslovih sferičnih funkcij. Problem se zopet pojavi pri izbiri izraza za te funkcije. Splošni izraz nam bo drugi pogoj preveč zakompliciral :

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\text{Sin}[\rho]}{\rho}$$

$$n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\text{Cos}[\rho]}{\rho}$$

Če se zopet omejimo na s - valove in vstavimo $j_l(\rho) = \frac{\text{Sin}[\rho]}{\rho}$ in $n_l(\rho) = -\frac{\text{Cos}[\rho]}{\rho}$ dobimo :

$\text{Sin}[k\, a] = 0 \Rightarrow k = \frac{n\,\pi}{a}$ iz prve ter :

$\text{Sin}[2\, k\, a] = -\frac{2\,\lambda}{\pi}$ iz druge enačbe (po izpeljavi, ki je identična iskanju maximuma v nalogi (c))

Če vstavimo prvi izraz v drugega dobimo kot pogoj za pole :
$\lambda a = 0$, kar bi pomenilo da so poli možni le, če je višina potencialne bariere ničelna ($\lambda = 0$) ali pa se nahaja v izhodišču ($a = 0$). Tudi če uporabimo asimptotsko formulo za j_l (kar zopet težko opravičimo) dobimo isti rezultat.

Če se omejimo na majhne $k\, a \to 0$ in vstavimo :

$$j_l(\rho) = \frac{\rho^l}{(2\, l + 1)\,!!}$$

$$n_l(\rho) = \frac{(2\, l - 1)\,!!}{\rho^{l+1}}$$

Pa takoj dobimo $\lambda \frac{(k\, a)^l}{(2\, l + 1)\,!!} = 0$, kar nam da ob predpostavki, da $\lambda \neq 0$ in $a \neq 0$, da je pol možen le če je $k = 0$ (torej ko je energija ničelna), kar zopet ni preveč uporabno.

Zaključim lahko le, da bi bilo pole izraza potrebno iskati povsem splošno, kar pa je že preveč komplicirano za okvir te domače naloge.