Perturbacija II

Avtor: Luka Ravnik

26.1.2003

1 Naloga

Delec, ki se lahko giblje samo po obodu kroga s polmerom r,opišemo s hamiltonjanom

$$H = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{1}$$

Valovna funkcija mora zadoščati periodičnim robnim pogojem. Obravnavamo dva taka delca, ki med sabo interagirata:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - \frac{\hbar}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2} - B\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{2}$$

1. V okviru perturbacijske teorije obravnavaj primer, ko je interakcija med delcema šibka.
2. Obravnavaj primer močne interakcije. V tem primeru mora biti razdalja med delcema majhna, zato lahko interakcijo razvijemo v bližini $\varphi_1 = \varphi_2$.

2 Šibka interakcija

Imamo torej dva delca, ki se gibljeta po obodu kroga. Zadnji člen v hamiltonjanu obravnavamo kot majhno motnjo. Lastne funkcije(rešitve osnovnega hamiltonjana) pa so znane in so oblike

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\imath M\varphi) \tag{3}$$

kjer je M celo število, kar nam da zahtevano periodičnost. Lastne vrednosti nemotenega hamiltonjana oz. energije nemotenih stanj so $\frac{\hbar^2}{2mr^2}M^2$. Ker imamo dva delca, imamo dve kvantni števili M_1 in M_2. Na vajah smo pokazali, da za hamiltonjan, ki ga lahko napišemo brez mešanih členov, lahko napišemo rešitve kot produkt lastnih rešitev za posamezna delca. Označimo $M = (M_1, M_2)$. Osnovno stanje je (0,0), kar nam da konstantne lastne funkcije. Za I. red perturbacije teorija pravi, da moramo za popravek k energiji gledat matrični element

$$\delta E_1 = \langle\psi_{0,0}|V|\psi_{0,0}\rangle = konst.\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-\imath M_1\varphi)\exp(-\imath M_2\varphi)\cos(\varphi_1-\varphi_2)d\varphi_1 d\varphi_2 = 0 \tag{4}$$

kjer je V motnja. Matrični element ima vrednost 0, kar pomeni, da je popravek k energiji drugega reda(vemo,da je popravek < 0) in se glasi:

$$\delta E_2 = \sum\nolimits_{M_1\neq 0 M_2\neq 0}\frac{|\langle\psi_{M_1,M_2}|V|\psi_{0,0}\rangle|^2}{E_{0,0} - E_{M_1,M_2}} \tag{5}$$

Členi v vsoti imajo obliko

$$konst.\exp(\imath\varphi_1(1-M_1))\exp(-\imath\varphi_2(1+M_2))+\exp(-\imath\varphi_1(1+M_1))\exp(\imath\varphi_2(1-M_2)) \tag{6}$$

To je različno od 0 le za člene (-1,1) ter (1,-1).

Kaj pa prvo vzbujeno stanje? V tem primeru imamo degeneracijo in pridejo v poštev dvojice (0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0). O spremembah v sistemu nam v prvem redu sedaj povedo nekaj mešani matrični elementi

$$\langle\psi_{M1,M2}|V|\psi_{M1,M2}\rangle. \tag{7}$$

Dobimo torej matriko 4x4, katere lastne vrednosti so popravki k energiji, lastni vektorji pa so nova stanja hamiltonjana z motnjo. Nova lastna stanja so linearne kombinacije prejšnjih: (-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), popravki k energiji za posamezna stanja pa so (-c, -c, c, c),c=konst. Dobimo dve stanji z nižjo energijo in dve stanji z višjo energijo.

3 Močna interakcija

Če je interakcija močna, sta elektrona blizu skupaj in lahko člen, ki predstavlja perturbacijo razvijemo.

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2)\simeq 1-\frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{2}+\dots \tag{8}$$

Hamiltonjan se torej glasi:

$$H=-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2}-\frac{\hbar}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}-B+B\frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{2}+\dots \tag{9}$$

Če uvedemo novi spremenljivki $T=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ in $R=\varphi_1-\varphi_2$, dobimo obliko hamiltonjana, ki ustreza harmoničnemu oscilatorju, težišče pa se giblje po krogu, kot delec z dvojno maso:

$$H=-\frac{\hbar^2}{2(2m)r^2}\frac{\partial^2}{\partial T^2}-\frac{\hbar^2}{2(\frac{m}{2})r^2}\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{2}\frac{B}{\frac{m}{2}}\frac{m}{2}R^2-B+\dots, \tag{10}$$

kjer je $\omega=\frac{B}{\frac{m}{2}}$

Lastna energija sistema je v tem primeru(ko imamo zopet hamiltonjan brez mešanih členov) vsota lastne energije hamiltonjana za delec z dvojno maso, ki se giblje po obodu, ter lastne energije harmoničnega oscilatorja:

$$E=\frac{\hbar^2}{2(2m)r^2}M^2+\hbar^2\omega(n+\frac{1}{2}), \tag{11}$$

kjer je $M=\pm1,\pm2,\dots$ in $n=0,1,2,\dots$

Lastne funkcije pa so produkt lastnih funkcij za delec z dvojno maso, ki se giblje po obodu, ter lastnih funkcij za harmonski oscilator:

$$\psi=\psi_M(T)\psi_n(R)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\imath MT)\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}R_0 2^n n!}}H_n(\frac{R}{R_0})\exp(-\frac{1}{2}(\frac{R}{R_0})^2), \tag{12}$$

kjer so H_n Hermitovi polinomi, $R_0=\sqrt{\frac{\hbar}{\omega\frac{m}{2}}}$.