D. N. - BOJAN VRTIČ

Imamo H atom v osnovnem stanju ob času $t = 0$. Kakšna je verjetnost, da je ob nekem času t v 1. vzbujenem stanju, če je v izmeničnem električnem polju: $E(t) = E_0 \cos \omega t$

ob $t = 0$ je $|100\rangle$

Poglejmo si najprej hamiltonovo funkcijo:

$$H = H_0 + V(t) = H_0 - e E(t) \cdot z$$

Zanimajo nas koeficienti c_{nlm}, kjer je $n > 1$.

$$c_{nlm}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \; {}_0\langle n l m, t' | V(t') | 100, t' \rangle_0$$

Poglejmo si najprej časovni razvoj:

$$|n l m, t'\rangle_0 = |n l m\rangle_0 \, e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$$

kjer je $E_n = -\frac{1}{2} m c^2 \alpha^2 \frac{1}{n^2}$

Torej lahko sedaj zapišemo:

$$c_{nlm}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \; {}_0\langle n l m | -e E(t) \hat{z} | 100 \rangle_0 \, e^{i \frac{E_n}{\hbar} t' - i \frac{E_1}{\hbar} t'} =$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \; {}_0\langle n l m | -e E(t) \hat{z} | 100 \rangle \, e^{i \omega_{n1} t'}$$

Uvedli smo substitucijo $\omega_{n1} = \frac{E_n - E_1}{\hbar}$

sedaj moramo izračunati $\langle n l m | \hat{z} | 100 \rangle$, kjer bomo $\hat{z}$ napisali v sfernih koordinatah, saj je potem večina matričnih elementov enaka 0.

$$z = r \cos \vartheta$$

In tako dobimo:

$$\langle n\, l\, m | \hat{z} | 1\,0\,0 \rangle = \langle n\, l\, m | r \cos\vartheta | 1\,0\,0 \rangle$$

$\cos\vartheta$ lahko izrazimo s kotnim delom vodikovih funkcij

saj velja $Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \Rightarrow \cos\vartheta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_{10}(\vartheta, \varphi)$

$$\Rightarrow \langle n\, l\, m | r \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_{10}(\vartheta, \varphi) | 1\,0\,0 \rangle$$

Poglejmo sedaj samo kotni del tega izraza:

$$\int d\Omega\, Y_{lm}^{*}\, Y_{10}\, Y_{00}$$

Ker so funkcije Y_{lm} ortogonalne med seboj je ta izraz različen od 0 samo v primeru, ko je $l=1$ in $m=0$.

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

In ker nas zanima prvo vzbujeno stanje $n=2 \Rightarrow$

$\langle 2\,1\,0 | \hat{z} | 1\,0\,0 \rangle$ je treba izračunati še radialni del, saj vemo da nam kotni del prispeva $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$.

Uporabili bomo: $R_{21} = \frac{2}{\sqrt{3}} (2 r_B)^{-3/2} \frac{r}{2 r_B} e^{-\frac{r}{2 r_B}}$

$$R_{10} = 2\, r_B^{-3/2}\, e^{-\frac{r}{r_B}}$$

$$\langle 2\,1\,0 | \hat{z} | 1\,0\,0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \int_0^\infty R_{21}^{*}\, r \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, R_{10}\, r^2\, dr =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{2}\, r_B^{3} \cdot 2} \int_0^\infty \frac{r}{r_B} \cdot e^{-\frac{r}{2 r_B}} \cdot r \cdot e^{-\frac{r}{r_B}} \cdot r^2\, dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\, r_B \int_0^\infty \left(\frac{r}{r_B}\right)^4 e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{r}{r_B}\right)} d\left(\frac{r}{r_B}\right)$$

Uvedemo substitucijo $\frac{r}{r_B} = x$ in

uporabimo nato integral $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$

$$\langle 210|\hat{z}|100\rangle = \frac{\sqrt{2}}{6} r_B \int_0^\infty x^4 e^{-\frac{3}{2}x}\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, r_B}{6} \cdot \frac{4!}{\left(\frac{3}{2}\right)^5} = \frac{128\sqrt{2}\, r_B}{243}$$

In sedaj uporabimo to v $c_{nem}(t)$

$$c_{nem}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\, e^{i\omega_{21}t'}\left(-e\,E(t')\right)\frac{128\sqrt{2}\, r_B}{243} =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\,\frac{128\sqrt{2}\, r_B \cdot e}{243}\int_0^t e^{i\omega_{21}t'} E_0 \cos\omega t'\, dt =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\,\frac{128\sqrt{2}\, r_B\, e E_0}{243}\int_0^t \frac{e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}}{2} e^{i\omega_{21}t'} dt =$$

$$= A\int_0^t \left(e^{i(\omega+\omega_{21})t'} + e^{i(\omega_{21}-\omega)t'}\right) dt' =$$

$$= A\left[\frac{1}{i(\omega+\omega_{21})}\left(e^{i(\omega+\omega_{21})t} - 1\right) + \frac{1}{i(\omega_{21}-\omega)}\left(e^{i(\omega_{21}-\omega)t} - 1\right)\right]$$

Sedaj nas zanima kdaj bodo prehodi največji?
Največji bodo ko bo $\omega \sim \omega_{21}$
Poglejmo si sedaj, če je $x = \omega - \omega_{21}$, potem lahko prvi člen zanemarimo.

$$\underset{\omega\to\omega_{21}}{c_{210}(t)} \sim A\,\frac{1}{ix}\left(e^{-ixt} - 1\right)$$

Poglejmo sedaj še verjetnost:

$$P_{210}(t) \sim |c_{210}(t)|^2 = A^2\,\frac{1}{x^2}\,(1-\cos xt)\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{210}(t) = |A|^2\,\frac{4}{x^2}\sin^2\frac{xt}{2}}$$

Upoštevali smo, da je: $|e^{-ixt}-1|^2 = (e^{ixt}-1)(e^{-ixt}-1) = 2-2\cos xt$

in da je $(1-\cos xt) = 2\sin^2\frac{xt}{2}$