Starkov pojav II

Grega Milčinski

9. junij 2002

1 Naloga

Izračunaj popravke energin in lastne funkcije prvega vzbujenega stanja vodikovega atoma v šibkem homogenem zunanjem električnem polju. Uporabi najnižji red teorije motenj, ki da netrivialne rezultate.

2 Rešitev

Kot lahko opzimo že v prejšnji nalogi, lahko operator energije vodikovega atoma v homogenem električnem polju zapišemo kot:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - eEz = H_0 + V \\ V &= -eEz \end{aligned}$$

Spet nas zanima primer, ko je jakost zunanjega električnega polja E veliko manjša od notranjega električnega polja, zato spet uporabimo rezultat iz teorije motenj. Energijo stanja $|n\rangle$ zapišemo kot vsoto energije nemotenega stanja in popravka prvega reda.

$$E_n = E_n^0 + E_n^1$$

Za popravek prvega reda velja:

$$E_n^1 = < n^0|V|n^0 >$$

pri čemer je $|n^0\rangle$ nemoteno stanje. Le-to je v našem primeru prvo vzbujeno stanje vodikovega atoma.
Za prvo vzbujeno stanje so možna kvantna števikla $l = 0$ $(m = 0)$ in $l = 1$ $(m = -1, 0, 1)$.
Torej imamo štiri degeneracije: 200, 21–1, 210, 211
$V_{2lm,2l'm'} = < 2lm|V|2l'm' >$
Dobimo matriko velikosti 4×4:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 200 & 21\text{–}1 & 210 & 211 \end{array} \\ \begin{array}{c} 200 \\ 21\text{–}1 \\ 210 \\ 211 \end{array} & \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} \\ V_{41} & V_{42} & V_{43} & V_{44} \end{pmatrix} \end{array}$$

V_{23} predstavlja člen $< 21\text{–}1|V|210 >$
Lastne vrednosti te matrike so popravki k energiji, lastni vektorji pa nove lastne funkcije
Vemo, da ima vsak člen nad diagonalo simetrično pod diagonalo postavljen svoj hermitsko konjugirani par.
$-eEz = -eEr\cos\theta$ - vidimo, da se ohranja vrtilna količina v smeri z (l_z)
To pomeni, da je komutator $[V, l_z] = 0$

$$< nlm|[V, L_z]|n'l'm' > \;=\; 0$$

$$[V, L_z] = VL_z - L_zV$$

$$\begin{aligned}
< nlm|VL_z|n'l'm' > - < nlm|L_zV|n'l'm' > &= 0 \\
L_z|nlm > &= \hbar m|nlm > \\
\hbar m' < nlm|V|n'l'm' > - \hbar m < nlm|V|n'l'm' > &= 0 \\
\hbar < nlm|V|n'l'm' > (m' - m) &= 0
\end{aligned}$$

Dokazali smo, da je matrični element $< nlm|V|n'l'm' >$ enak 0, če $m \neq m'$
Z upoštevanem partnosti lahko dokažemo, da so vsi diagonalni elementi enaki 0 - parnost sfernih harmonikov je namreč $(-1)^l$, V pa ima liho parnost (-1):

$$(-1)^l(-1)(-1)^{l'} = (-1)^{l+l'+1}$$

Izračunati moramo samo še člen $< 200|V|210 >$:

$$< 200|V|210 >= \int R_{20}Y_{00}VR_{21}Y_{10} =$$
$$\int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2(2r_B)^{-\frac{3}{2}}(1 - \frac{r}{2r_B})e^{-\frac{r}{2r_B}} \frac{1}{4\pi}(-eEr\cos\theta) \cdot$$
$$\cdot 3^{-\frac{1}{2}}(2r_B)^{-\frac{3}{2}}(\frac{r}{r_B})e^{-\frac{r}{2r_B}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos\theta r^2 dr dcos\theta d\phi = 3eEr_B$$

Sedaj moramo diagonalizirati matriko:

$$V = C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kjer je $C = 3eEr_B$
Ker so drugi in četrti stolpec ter druga in četrta vrstica enaki 0, lahko takoj uganemo dva lastna vektorja z lastnima vrednsotima enakima 0.
To sta lastna vektorja:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} in \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vidimo, da stanji $|21-1>$ in $|211>$ ostaneta enaki.
Preostane nam samo še diagonalizacija matrike $\begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}$

$$det\left(\begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$det(\begin{pmatrix} -\lambda & C \\ C & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 - C^2 = 0$$
$$\lambda = \pm C$$

Poiščimo še pripadajoča lastna vektorja:
za $\lambda = -C$:

$$\begin{pmatrix} C & C \\ C & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 0$$

za $\lambda = C$:

$$\begin{pmatrix} -C & C \\ C & -C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 0$$

Razlika energije
$\delta E_1 = 3eEr_B$, nova lastna funkcija pa
$|\psi' >= \frac{\sqrt{2}}{2}|200> + \frac{\sqrt{2}}{2}|210>$
$\delta E_2 = -2eEr_B$, pripadajoča lastna funkcija pa
$|\psi'' >= -\frac{\sqrt{2}}{2}|200> + \frac{\sqrt{2}}{2}|210>$