Domača naloga iz kvantne mehanike
SPIN I
Klemen Kunstelj

- Naloga:

Za delec v tridimenzionalni krogelni potencialni jami s potencialom $V(r) = -V_0\Theta(a-r)$ in polmerom *a* poišči pogoj za obstoj osnovnega vezanega stanja!

• *Rešitev:*

Najprej napišimo Schrodingerjevo enačbo:

$$-\frac{\hbar}{2m}\ddot{u} - V_0\Theta(a-r)u + \frac{\hbar l(l+1)}{2mr^2}u = Eu\,. \tag{1}$$

Naše osnovno stanje je $l = 0$, kar pa spremeni enačbo (1):

$$-\frac{\hbar}{2m}\ddot{u} - V_0\Theta(a-r)u = Eu\,. \tag{2}$$

Ker je vrednost V_0 negativna, izgleda potencial v obliki nekakšne jame, zato rešujemo enačbo (2) v dveh kosih:

1. $V = -V_0$, kjer je $0 < r < a$. Rešitev enačbe (2) je potem oblike:

$$u_1(r) = A\sin(kr), \qquad k = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}\,. \tag{3}$$

Cos (kr) ne zadošča pogoju $u(0) = 0$, zato je rešitev le sinus.

2. $V = 0$, kjer je $r > a$. Rešitev Schrodingerjeve enačbe za ta del je oblike:

$$u_2(r) = B\,Exp(-q(r-a)), \qquad q = \sqrt{\frac{2m(-E)}{\hbar^2}}\,. \tag{4}$$

Za določitev koeficientov *A* in *B* potrebujemo še robne pogoje na meji $r = a$:

$$\begin{aligned} &- \quad u_1(a) = u_2(a); \\ &- \quad \dot{u}_1(a) = \dot{u}_2(a). \end{aligned} \tag{5}$$

Iz teh dveh pogojev, ki ju uporabimo na (3) in (4), dobimo transcendentno enačbo:

$$k\ \ ctg(ka) = -q$$

$$k^2 + q^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} = K_0^2, \tag{6}$$

iz katere dobimo pogoj za vezano stanje.

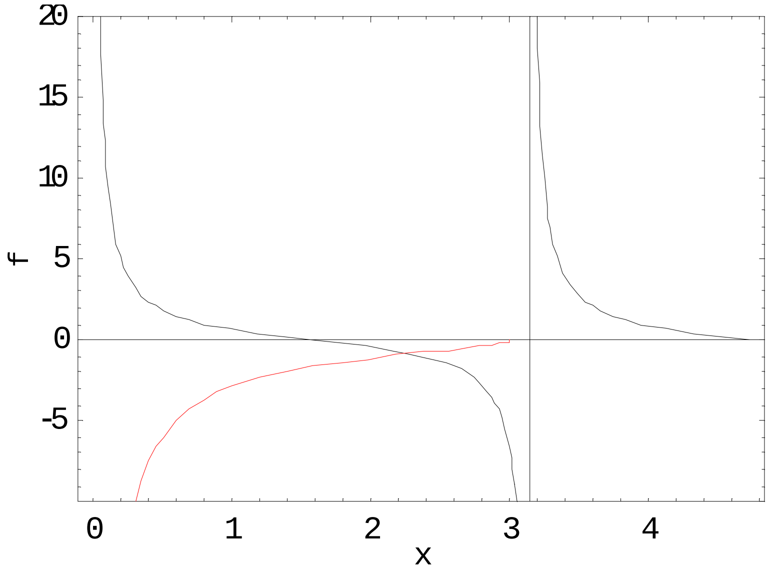
Če izrazimo q iz druge enačbe (6) in vstavimo v prvo enačbo (6), dobimo:

$$k\ \ ctg(ka) = -\sqrt{K_0^2 - k^2}\ . \tag{7}$$

Delimo enačbo(7) s k in vpeljemo novi spremenljivki $x = ka$ in $x_0 = K_0 a$:

$$ctg(x) = -\sqrt{\frac{x_0^2}{x^2} - 1}\ . \tag{8}$$

To enačbo rešimo grafično in dobimo pogoj (narišemo levi (črni graf) in desni del (rdeči graf) enačbe (8)):



Presečišče x osi z rdečim grafom (korenska funkcija) označuje x_0, s črnim pa $\pi/2$. To pomeni, da se krivulji sekata (v tem primeru obstaja rešitev enačbe (8)) le, če je $x_0 > \pi/2$. Vezano stanje obstaja potem le, če je:

$$\sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}} > \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad V_0 > \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}\ . \tag{9}$$

Zaključek, ki ga lahko naredimo na podlagi rešitve te naloge je, da v 3D obstajajo vezana stanja le, če je jama dovolj globoka.

- **Naloga:**

Imamo spinsko valovno funkcijo $|\psi\rangle$ dveh delcev. Za ta sistem delcev velja še:

$$S_{1_Z}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\hbar|\psi\rangle \tag{10}$$

$$S_{2_Y}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\hbar|\psi\rangle . \tag{11}$$

Kolikšna je verjetnost, da izmerimo celoten spin obeh delcev 0 ?

- *Rešitev:*

Že iz predavanj vemo, da je baza dveh delcev s spinom 1/2, s katero lahko izrazimo katerokoli spinsko stanje, oblike:

$|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$ in $|\downarrow\uparrow\rangle$.

Izrazimo sedaj naše stanje kot linearno kombinacijo teh baznih vektorjev:

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c\,|\downarrow\downarrow\rangle + d\,|\downarrow\uparrow\rangle . \tag{12}$$

Za določitev koeficientov a, b, c in d najprej uporabimo zvezo (10). Pri tem deluje operator S_{1_Z} le na spin prvega delca ($S_{1_Z}|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\hbar|\uparrow\rangle$, $S_{1_Z}|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}\hbar|\downarrow\rangle$):

$$\frac{1}{2}\hbar\left(a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c\,|\downarrow\downarrow\rangle + d\,|\downarrow\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{2}\hbar\left(a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle - c\,|\downarrow\downarrow\rangle - d\,|\downarrow\uparrow\rangle\right). \tag{13}$$

Iz zveze (13) sledi, da sta a in b poljubni kompleksni števili, c in d pa sta enaka 0. Ker pa še ne vemo koliko sta a in b, uporabimo še zvezo (11). Pred tem je treba operator S_{2_Y} izraziti z anihilacijskima operatorjema S_{2+} in S_{2-} :

$$S_{2_Y} = \frac{1}{2i}[S_{2+} - S_{2-}]. \tag{14}$$

Operatorja S_{2+} in S_{2-} delujeta le na spin drugega delca, pri čemer v splošnem velja:

$$S_+|\uparrow\rangle = 0, \quad S_+|\downarrow\rangle = \hbar|\uparrow\rangle, \quad S_-|\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\rangle, \quad S_-|\downarrow\rangle = 0 . \tag{15}$$

Ko zvezo (14) uporabimo na enačbi (11), pri tem za funkcijo vzamemo zvezo (12) in upoštevamo (15) dobimo:

$$\frac{1}{2i}\hbar\left(-a|\uparrow\downarrow\rangle + b|\uparrow\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{2}\hbar\left(a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle\right). \tag{16}$$

Iz (16) potem dobimo pogoj, da je $b = ia$. Sedaj lahko na novo zapišemo zvezo (12), ker poznamo vse koeficiente, pri tem pa mora biti valovna funkcija tudi normirana, zato je a=1/$\sqrt{2}$:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\uparrow\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle . \tag{17}$$

Ker nas zanima s kolikšno verjetnostjo je $S = S_1 + S_2 = 0$, moramo zamenjati bazo z bazo lastnih funkcij celotnega spina. Uporabimo tabelo Clebsch – Gordanovih koeficientov. Gledamo tabelo 1/2 ×1/2, saj sklapljamo 2 spina z velikostjo 1/2:

$$\begin{aligned} |\uparrow\uparrow\rangle &= 1\cdot|1,1\rangle, \\ |\uparrow\downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|0,0\rangle \end{aligned} \tag{18}$$

Zapišemo $|\psi\rangle$ z novo bazo:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + i\frac{1}{2}|1,0\rangle + i\frac{1}{2}|0,0\rangle . \tag{19}$$

Ker je koeficient C pred baznim vektorjem $|0,0\rangle$ enak i1/2, je verjetnost, da izmerimo celoten spin 0 enaka:

$$P_{S=0} = |C|^2 = \frac{1}{4} . \tag{20}$$