Domača naloga iz kvantne mehanike

Boštjan Berčič

20.5.2002

Izračunati želimo pričakovane vrednosti operatorja kvadrata velikosti vrtilne količine, ter pričakovane vrednosti vseh projekcij vrtilne količine stanja:

$$\psi(\vec{r}) = A(x + iy + z)e^{-\frac{r}{r_0}}.$$

Naše stanje razvijemo po lastnih stanjih vrtilne količine $|lm>$ (sferni harmoniki), ki sestavljajo ortonormiran sistem:

$$< lm|l^{'}m^{'} >= \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

$$< \vartheta, \varphi|lm >= Y_{lm}(\vartheta, \varphi);$$

$$Y_{1,0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$$

$Y_{1,\pm 1}(\vartheta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$. Naše stanje zapiemo v krogelnih koordinatah:

$$\psi(\vec{r}) = A(r\cos\varphi\sin\vartheta + ir\sin\varphi\sin\vartheta + r\cos\vartheta)e^{-\frac{r}{r_0}}$$

Iz prvih dveh členov v oklepaju izpostavimo $r\sin\vartheta$, kar ostane: $\cos\varphi + i\sin\varphi$ pa je ravno $e^{i\varphi}$ torej:

$$\psi(\vec{r}) = Are^{-\frac{r}{r_0}}(\sin\vartheta e^{i\varphi} + \cos\vartheta)$$

oziroma, če to napišemo s sfernimi harmoniki:

$$\psi(\vec{r}) = Are^{-\frac{r}{r_0}}(-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1,1} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0}).$$

Konstanto A določimo z normalizacijo, vendar zahtevamo, da sta vsak zase normalizirana del, ki je odvisen samo od r, in del ki je odvisen samo od φ in ϑ : $\int |R(r)|^2 r^2 dr = 1$ in $\int |F(\varphi\vartheta)|^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = 1$, pri čemer je R del, ki je odvisen samo od r ,F pa del, ki je odvisen samo od φ in ϑ. Oba dela sta pomnožena še z neko normalizacijsko konstanto. Normalizirajmo najprej F:

$$\int C^2(|Y_{1,1}|^2\frac{8\pi}{3} - \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}(Y^*_{1,0}Y_{1,1} + Y^*_{1,1}Y_{1,0}) + \frac{4\pi}{3}|Y_{1,0}|^2)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

. Upoštevamo ortonormiranost sfernih harmonikov in dobimo:

$$C^2\frac{8\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = C^2 4\pi = 1,$$

torej $C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. Sedaj bi morali normalizirati še R (del odvisen samo od r), vendar se bo kasneje izkazalo da to ni potrebno, kljub temu zapišimo pogoj:

$$\int R^* R r^2 dr = 1$$

Izračunajmo pričakovano vrednost kvadrata velikosti vrtilne količine, upoštevamo zvezo:

$$L^2|lm> = l(l+1)\bar{h}^2|lm>$$

$$< \vec{L}^2 > = < \psi|L^2|\psi > = \int R^* F^* R(-2\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{h}^2 Y_{1,1} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}\bar{h}^2 Y_{1,0}) r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = 2\bar{h}^2$$

Opazimo, da je integral po r enak normalizacijskemu pogoju za R. Podobno ta integral izpade tudi pri računanju ostalih vrednosti.

Izračunajmo še projekcijo vrtilne količine v smeri z, upoštevamo:

$$L_z|lm> = \bar{h}m|lm>$$

$$< L_z > = < \psi|L_z|\psi > = \int R^* F^* (-\sqrt{\frac{2}{3}})\bar{h} Y_{1,1} R r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{2}{3}\bar{h}$$

Delovanja operatorjev projekcije vrtilne količine na smeri x in y ne poznamo, poznamo pa: $L_+ = L_x + iL_y$, $L_- = L_x - iL_y$, torej $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$in $L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$, velja še:

$$L_\pm|lm> = \bar{h}\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|lm \pm 1>$$

$$< L_+ > = < \psi|L_+|\psi > = \int R^* F^* R L_+ F dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Upoštevamo: $L_+|1,0> = \sqrt{2}\bar{h}|1,1>$ in $L_-|1,0> = 0$ torej $< L_+ > = -\frac{2}{3}\bar{h}$. Podoben račun sledi za L_-, vendar lahko dokažemo, da sta izraza v našem primeru enakovredna:

$$< L_- > = < \psi|L_-|\psi > = < L_-\psi|\psi > = < \psi|L_+|\psi >^*$$

torej $< L_- > = -\frac{2}{3}\bar{h}$; $L_x = -\frac{2}{3}\bar{h}$ in $L_y = 0$