Harmonski oscilator

Jasna Urbanija

april 2002

0.1 Klasično

Opazujemo harmoski oscilator. Ob času t=0 vključimo električno polje $\vec{E}$ kot kaže slika. Napišemo hamiltoniana in rešimo sistem enačb:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 - eEx$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$\Rightarrow \dot{p} = -kx + eE \qquad in \qquad \dot{x} = \frac{p}{m}$

$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{eE}{m}$.
V mirovni legi je $\ddot{x} = 0$. $\qquad \Rightarrow x_0 = b = \frac{eE}{k}$
Robni pogoji: $x(t=0) = 0 \quad \dot{x}(t=0) = 0$
Nastavek za rešitev diferencialne enačbe: $x = b + Acos(wt) + Bsin(wt)$
Ko upoštevamo robne pogoje dobimo A = -b in B = 0. $\Rightarrow x = b(1 - cos(wt))$ pri čemer je $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

0.2 Kvantno

Mirovna lega nam predstavlja osnovno stanje harmonskega oscilatorja. Ko polje še ni vključeno:

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi {x_0}^2}} e^{-\frac{x^2}{2{x_0}^2}} \rightarrow |0>$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \hbar w(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

Napišem novega hamiltoniana in ga razvijem na popolni kvadrat, tako da dobim enako obliko kot če ni polja:

$$\widetilde{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 - eEx = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left[(x - \frac{eE}{k})^2 - \frac{e^2E^2}{k^2}\right]$$

in definiram $\widetilde{x} = x - \frac{eE}{k}$

$$\Rightarrow \widetilde{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k\widetilde{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{e^2E^2}{k}$$

Konstantni del hamiltoniana lahko odmislimo in računamo naprej z uporabo kreacijskih in anihilacijskih operatorjev. Najprej pa za osvežitev spomina malo ponovitve, ki nam bo prav prišla pri nadaljnem računanju:

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \hbar w(a^\dagger a + \frac{1}{2})$

$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{mw}} \qquad p_0 = \frac{\hbar}{x_0} \qquad w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - i\frac{p}{p_0}\right)$

$|n> =$

Sedaj pa nazaj k nalogi. Vpeljemo nov operator $\widetilde{a}$:

$$\widetilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\widetilde{x}}{x_0} + i\frac{\widetilde{p}}{p_0}\right)$$

$$\widetilde{H} = \hbar w\left(\widetilde{a}^\dagger\widetilde{a} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{e^2E^2}{k}$$

Zapišemo povezavo med starim in novim anihilacijskim operatorjem:

$$\widetilde{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{x - \frac{eE}{k}}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right) = a - \frac{b}{\sqrt{2}x_0} = a + \alpha$$

$$a|0>= 0 \quad \Rightarrow \quad (\widetilde{a} - \alpha)|0>= 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{a}|0>= \alpha|0>$$

Sedaj želimo napisati osnovno stanje oscilatorja $|0>$ v novi bazi :

$$|0>= \sum_n c_n|\widetilde{n}>$$

$$c_n =<\widetilde{n}|0> \quad = \quad <\frac{\widetilde{a}^{\dagger\widetilde{n}}}{\sqrt{\widetilde{n}!}}\widetilde{0}|0> \quad = \quad <\widetilde{0}|\frac{\widetilde{a}^{\widetilde{n}}}{\sqrt{\widetilde{n}!}}0> \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\widetilde{n}!}}<\widetilde{0}|\alpha^{\widetilde{n}}0> \quad = \quad \frac{\alpha^{\widetilde{n}}}{\sqrt{\widetilde{n}!}}<\widetilde{0}|0>$$

$$\Rightarrow |0>= \sum_{\widetilde{n}}\frac{\alpha^{\widetilde{n}}}{\sqrt{\widetilde{n}!}}<\widetilde{0}|0>|\widetilde{n}>$$

$$|\widetilde{n}>= \frac{\alpha^{\dagger\widetilde{n}}}{\sqrt{\widetilde{n}!}}|\widetilde{0}>$$

$$\Rightarrow |0>= \sum_n \frac{\alpha^{\widetilde{n}}\widetilde{a}^{\dagger\widetilde{n}}}{\widetilde{n}!}<\widetilde{0}|0>|\widetilde{0}>= e^{\alpha\widetilde{a}^\dagger}<\widetilde{0}|0>|\widetilde{0}>,$$

kjer je $<\widetilde{0}|0>$ neko kompleksno število.
Sedaj pa se namučimo še s časovnim razvojem funkcije:

$$|0,t>= \sum_{\widetilde{n}}\frac{\alpha^{\widetilde{n}}}{\sqrt{\widetilde{n}!}}<\widetilde{0}|0>|\widetilde{n}>e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

$$E_{\widetilde{n}} = \hbar w(\widetilde{n} + \frac{1}{2}) - \frac{e^2E^2}{2k}$$

Sedaj pa vstavimo $E_{\widetilde{n}}$ v časovni razvoj in dobimo:

$$|0,t>= \sum_{\widetilde{n}}\frac{\alpha^{\widetilde{n}}}{\sqrt{\widetilde{n}!}}<\widetilde{0}|0>\frac{\widetilde{a}^{\dagger\widetilde{n}}}{\sqrt{\widetilde{n}!}}e^{-iwt(\widetilde{n}+\frac{1}{2})+\frac{i}{\hbar}\frac{e^2E^2}{2k}t} = \sum_{\widetilde{n}}\frac{\alpha^{\widetilde{n}}\widetilde{a}^{\dagger\widetilde{n}}}{\widetilde{n}!}(e^{-iwt})^{\widetilde{n}}<\widetilde{0}|0>|\widetilde{0}>e^{-\frac{iwt}{2}+\frac{i}{\hbar}\frac{e^2E^2}{2k}t} =$$

$$= e^{\alpha\widetilde{a}^\dagger + e^{-iwt}}<\widetilde{0}|0>|\widetilde{0}>e^{-\frac{iwt}{2}+\frac{i}{\hbar}\frac{e^2E^2}{2k}t}$$

$<\widetilde{0}|0>$ je konstanta, ki jo določimo z normalizacijo: $\sum_n |c_n|^2 = 1$.

$$\Rightarrow \sum_{\widetilde{n}}\frac{\alpha^{\widetilde{n}}}{\sqrt{\widetilde{n}!}}<\widetilde{0}|0>|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{\widetilde{n}} \frac{|\alpha|^{2\widetilde{n}}}{\widetilde{n}!} | < \widetilde{0}|0 > |^2 = 1$$

$$\Rightarrow e^{|\alpha|^2} | < \widetilde{0}|0 > |^2 = 1$$

$$\Rightarrow < \widetilde{0}|0 >= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

To pa vstavimo nazaj v časovni razvoj in dobimo končno obliko časovnega razvoja:

$$|0, t >= e^{\alpha \widetilde{a}^\dagger + e^{-iwt}} e^{-\frac{iwt}{2} + \frac{i}{\hbar}\frac{e^2 E^2}{2k} t} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \quad \widetilde{0} >$$

Sedaj pa iščemo kako se spreminja povprečna lega $< x(t) >$: Pri tem opazimo, da lahko časovni razvoj poenostavimo, če zanemarimo fazna faktorja $e^{-\frac{iwt}{2} + \frac{i}{\hbar}\frac{e^2 E^2}{2k} t}$ ter zapišemo $\alpha \to \alpha e^{-iwt}$.

$$\Rightarrow |0 >= e^{\alpha \widetilde{a}^\dagger} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \quad \widetilde{0} >$$

Zapišemo $< x(t) >$:

$$< x(t) >=< 0, t|x|0, t >=< 0, t| \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)|0, t >$$

Ker velja:

$$\widetilde{a}|0 >= \alpha|0 > \quad \Rightarrow \quad \widetilde{a}|0, t >= \alpha e^{-iwt}|0, t >$$

in ker je $\widetilde{a} = a + \alpha$ velja tudi $a|0, t >= \alpha(e^{-iwt} - 1)|0, t >$. lahko zapišemo:

$$\Rightarrow < x(t) >= \frac{x_0}{\sqrt{2}} \left[< 0, t|a|0, t > + < 0, t|a^\dagger|0, t > \right] = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \left[\alpha(e^{-iwt} - 1) + \alpha(e^{iwt-1)} \right] =$$

$$= \frac{\alpha x_0}{\sqrt{2}} [2cos(wt) - 2] = \sqrt{2}\alpha x_0 (cos(wt) - 1)$$

in ko se spomnimo, da je $\alpha = -\frac{b}{\sqrt{2}x_0}$ dobimo rezultat:

$$< x(t) >= b(1 - cos(wt))$$