Dokaz Heisenbergovega principa nedoločenosti

Matjaž Panjan

14. april 2002

1. **Naloga**:

- Izpelji Heisenbergovo načelo nedoločenosti za produkt nedoločenosti poljubnih hermitskih operatorjev A in B
- S pomočjo načela nedoločenosti za lego in gibalno količino oceni energijo osnovnega stanja harmonskega oscilatorja

2. **Reševanje:**

2.1. Matematične osnove

Preden bomo začeli z dokazovanjem se moramo spomniti nekaj osnov.

Operator A je hermitski, če velja: $A^\dagger = A$
Za antihermitski operator pa velja: $B^\dagger = -B$

Komutator, ki je definiran takole: $[A,B] = AB - BA$ je antihermitski.
Pokažimo:

$$[A,B]^\dagger = (AB-BA)^\dagger = (AB)^\dagger - (BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = -(AB-BA) = -[A,B]$$

Antikomutator: $\{A,B\} = AB + BA$ pa je hermitski.

$$\{A,B\}^\dagger = (AB+BA)^\dagger = (AB)^\dagger + (BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger + A^\dagger B^\dagger = AB + BA = \{A,B\}$$

Vsak produkt dveh hermitskih operatorjev lahko razcepimo na hermitski in antihermitski del:

$$AB = \frac{1}{2}\{A,B\} + \frac{1}{2}[A,B]$$

Preverimo, da je to res:

$$\frac{1}{2}\{A,B\} + \frac{1}{2}[A,B] = \frac{1}{2}(AB+BA) + \frac{1}{2}(AB-BA) = AB$$

Dokažimo, da so pričakovane vrednosti hermitskega operatorja realne:

$$\langle A\rangle = \langle\psi \mid A \mid \psi\rangle = \langle A^\dagger\psi \mid \psi\rangle = \langle A\psi \mid \psi\rangle = \langle\psi \mid A\psi\rangle^* = \langle A\rangle^*$$

Pričakovane vrednosti antihermitskega operatorja pa so imaginarne:

$$\langle B\rangle = \langle\psi \mid B \mid \psi\rangle = \langle B^\dagger\psi \mid \psi\rangle = \langle -B\psi \mid \psi\rangle = \langle\psi \mid B\psi\rangle^* = -\langle B\rangle^*$$

Dokažimo sedaj Heisenbergov princip nedoločenosti za dva poljubna operatorja:
Pred tem se spomnimo še neenakosti Schwarz-Cauchy-Bunjakovski, ki pravi (za dokaz glejte predavanja iz Analize II):

$$\left|\langle[\varphi,\psi]\rangle\right|^2 \le \langle\varphi \mid \varphi\rangle\langle\psi \mid \psi\rangle$$

Za kvadrat nedoločenosti velja:

$$\delta^2 A = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = \left\langle \left(A - \langle A\rangle\right)^2 \right\rangle$$

2.2. Dokaz načela nedoločenosti dveh hermitskih operatorjev

Sedaj pa končno dokažimo slavno načelo kvantne mehanike:

$$\delta^2 A\,\delta^2 B = \left\langle \left(A-\langle A\rangle\right)^2\right\rangle \left\langle \left(B-\langle B\rangle\right)^2\right\rangle = \left\langle \psi \mid \left(A-\langle A\rangle\right)^2 \mid \psi\right\rangle \left\langle \psi \mid \left(B-\langle B\rangle\right)^2 \mid \psi\right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(A-\langle A\rangle\right)\psi \mid \left(A-\langle A\rangle\right) \mid \psi\right\rangle \left\langle \left(B-\langle B\rangle\right)\psi \mid \left(B-\langle B\rangle\right) \mid \psi\right\rangle \geq \left|\left\langle \left(A-\langle A\rangle\right)\psi \mid \left(B-\langle B\rangle\right)\psi\right\rangle\right|^2 =$$

$$= \left|\left\langle \psi \mid \left(A-\langle A\rangle\right)\left(B-\langle B\rangle\right)\psi\right\rangle\right|^2 = \left|\left\langle \psi \mid \underbrace{\frac{1}{2}\left[A-\langle A\rangle, B-\langle B\rangle\right]}_{\mathrm{Im}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left\{A-\langle A\rangle, B-\langle B\rangle\right\}}_{\mathrm{Re}}\psi\right\rangle\right|^2 =$$

$$= \left\langle \psi \mid \frac{1}{2}\left[A-\langle A\rangle, B-\langle B\rangle\right]\psi\right\rangle^2 + \left\langle \psi \mid \underbrace{\frac{1}{2}\left\{A-\langle A\rangle, B-\langle B\rangle\right\}}_{\geq 0}\psi\right\rangle^2 \geq \left|\left\langle \frac{1}{2}\left[A-\langle A\rangle, B-\langle B\rangle\right]\right\rangle\right|^2 \geq$$

$$\geq \left|\left\langle \frac{1}{2}[A,B]\right\rangle\right|^2$$

V tretjem koraku sem uporabil neenakost Schwarz-Cauchy-Bunjakovski. Pri delu, ki pa je označen z realnim in imaginarnim smo upoštevali zvezo za absolutno vrednost kompleksnega števila:

$$|a+ib|^2 = a^2 + b^2$$

V zadnjem koraku pa smo uporabili enakost:

$$\begin{aligned}
&\left(A-\langle A\rangle\right)\left(B-\langle B\rangle\right)-\left(B-\langle B\rangle\right)\left(A-\langle A\rangle\right)=\\
&= AB - A\langle B\rangle - \langle A\rangle B + \langle A\rangle\langle B\rangle - \left(BA - B\langle A\rangle - \langle B\rangle A + \langle B\rangle\langle A\rangle\right)=\\
&= AB - BA = [A,B]
\end{aligned}$$

Torej smo dokazali:

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle [A,B]\right\rangle\right|$$

2.3. Ocena energije osnovnega stanja harmonskega oscilatorja

S pomočjo načela nedoločenosti ocenimo energijo osnovnega stanja harmonskega oscilatorja!

Hamiltonjan za harmonski oscilator je: $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{kx^2}{2}$

Njegova povprečna vrednost pa: $\langle E\rangle = \langle H\rangle = \dfrac{\langle p^2\rangle}{2m} + \dfrac{k\langle x^2\rangle}{2}$

$$\delta^2 x = \left\langle \left(x-\langle x\rangle\right)^2\right\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

$$\langle x^2\rangle = \delta^2 x + \langle x\rangle^2 \geq \delta^2 x$$

Potencial harmonskega oscilatorja je simetričen zato je $\langle x\rangle^2 = 0$ in velja $\langle x^2\rangle = \delta^2 x$ (v splošnem to ni res!)

$$\langle p^2\rangle = \delta^2 p + \langle p\rangle^2 \geq \delta^2 p$$

Ker za gibalno količino in koordinato delca velja princip nedoločenosti lahko zapišemo:

$$\delta^2 p \geq \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\delta^2 x}$$

$$\langle p^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\langle x^2\rangle}$$

Tako lako Hamiltonijanan zapišem kot:

$$\langle H\rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m}\frac{1}{\langle x^2\rangle} + \frac{k\langle x^2\rangle}{2}$$

Iščemo minimum energije, zato odvajamo:

$$\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial\langle x^2\rangle} = -\frac{\hbar^2}{8m}\frac{1}{\langle x^2\rangle^2} + \frac{k}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{mk}}$$

Če to sedaj vstavimo v pričakovano vrednost energije dobimo:

$$\langle H\rangle \geq \frac{\hbar\omega}{2}$$

kar pa je natanko energija osnovnega stanja harmoničnega oscilatorja!