Andrej Kavčič

Greenova funkcija II

Do računskih zvez, ki bodo sledile v nadaljevanju, je prišel že sam Feynman, ko je želel izpeljati (že znano) Schrodingerjevo enačbo na bolj nazoren, oziroma predstavljiv način. Pri tem je naletel na t.i. popotni integral, katerega se bomo dotaknili v naši nalogi ob tem pa privzeli nekaj osnovnih načel oz. postulatov kvantne mehanike.

Tako bomo izračunali Greenovo funkcijo:

$$K(b,a) = \int e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]} Dx(t)$$

za prost delec, kar vbistvu predstavlja definicijo integrala po poteh, matematiki pa ga uvrščajo med t.i. funkcionalne integrale. Konkretno nas bo zanimal opis delca v točki b, če se je prej nahajal v točki a, in sicer opis z Greenovo funkcijo, katero je Feynman zapisal s $K(b,a)$.

Verjetnost, da pridemo iz točke a v b zapišemo kot $P(b,a) = |K(b,a)|^2$, kjer je $K(b,a)$ amplituda, ki se izračuna kot:

$$K(b,a) = \sum \phi(x(t))$$

Tako amplituda v algebrajičnem jeziku predstavlja neke vrste jedro oz. kernel, saj vsebuje množico vseh elementov , ki jih linearna transformacija preslika v določen element (oz. enoto grupe). Fizikalno pa nam pove iz katerih vseh možnih točk dobimo željeno točko (b). Tako moramo sešteti verjetnosti za vse možne poti, kar nam opisuje zgornja enačba.
Vse možne poti pa zaobjamemo na ta način, da razdelimo časovni interval na podintervale širine ε in sicer:

$$t_i - t_{i-1} = \varepsilon$$

$$N\varepsilon = t_b - t_a$$

Tako, da dano vsoto razpišemo v sledeč integral:

$$K(b,a) = \int\int ... \int \phi(x(t)) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Na tem mestu upoštevamo še postulat, ki pravi, da se pot zapiše kot:

$$\phi[x] = Ce^{\frac{i}{\hbar}S[x]}$$

ter jo vstavimo v zgornji integral in tako dobimo na začetku omenjeno Greenovo funkcijo (oz. Feynmanov integral):

$$K(b,a) = \int e^{\frac{i}{\hbar}S[b,a]}Dx$$

kjer se v členu Dx skrivajo vsi zgoraj zapisani integrali, in sicer ko gre št. intervalov proti neskončno.

Izračun Greenove funkcije za prost delec:

Na začetku potrebujemo zapis akcije za prost delec, le-ta se zapiše v naslednji obliki, saj smo čas razdelili na majhne intervale ter jih sešteli:

$$S[x(t)] = \int L(x(t))dt = \sum_i [\frac{1}{2}m\varepsilon(\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}})]$$

Nato zapišemo razdaljo x kot vsoto klasične razdalje in nove razdalje, saj se delec lahko giblje po vseh možnih poteh in ne samo po klasični poti: $x_i = x_k + x_j$.
Tako dobimo nov zapis za akcijo delca, ki se glasi:

$$S = S_k + \frac{m}{2\varepsilon}[(x_1)^2 + (x_2^2 - x_1)^2 + ... + (x_{n-1})^2]$$

kjer predstavlja izraz S_k kar klasično limito akcije: $S_k = \frac{1}{2}m\frac{(x_b - x_a)^2}{(t_b - t_a)}$.

Sedaj se lahko lotimo izračuna popotnega integrala:

$$K(b,a) = A_n e^{\frac{i}{\hbar}S_k} \int\int ... \int e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}[(x_1)^2 + (x_2^2 - x_1)^2 + ... + (x_{n-1})^2]} dx_1 dx_2 ... dx_n =$$

$$= A_n e^{\frac{i}{\hbar}S_k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2im}{2\hbar\varepsilon}(x_1 - \frac{x_2}{2})^2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\frac{3}{2}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\frac{4}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4)^2} dx_3 ...$$

$$... \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\frac{n}{n-1}(x_{n-1} - \frac{n}{n-1}x_n)^2} dx_n =$$

kjer smo integrale razpisali po posameznih spremenljivkah x_j in tako se rezultat integralov po vrsti glasi:

$$= A_n e^{\frac{i}{\hbar}S_k} \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}}(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}}(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}}(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} ...$$

$$...\sqrt{\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}}(\frac{n-1}{n})^{\frac{1}{2}} =$$

$$K(b,a) = A_n \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m})^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{im}{2\hbar}\frac{(x_b-x_a)^2}{(t_b-t_a)}}$$

Za določitev konstante bomo uporabili retardirano Greenovo funkcijo: $\psi(x,t) = \int K(x,t;x',t')\psi(x',t')dx'$, ki nam pove, s kakšno verjetnostjo se delec nahaja v točki x ob času t, če se je prej nahajal v znani točki x' ob času t'. Našo krajevno in časovno koordinato bomo rahlo varirali, tako da bomo funkcijo lahko razvili po krajevni koordinati, časovno bomo pa limitirali proti 0 in na ta način dobili nazaj isto funkcijo in od tod konstanto A.
Pri tem upoštevamo, da je L v izrazu za akcijo časovna konstanta saj je časovni interval silno kratek: $S = \int Ldt = L\varepsilon$.

$$\psi(x,t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{\frac{i}{\hbar}L\varepsilon}\psi(x+\eta,t)d\eta$$

$$\psi(x,t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{\frac{im}{2\hbar}\varepsilon(\frac{\eta}{\varepsilon})^2}\psi(x+\eta,t)d\eta$$

$$\psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}}[\psi(x,t)+\eta\frac{\partial\psi}{\partial t}]d\eta$$

Primerjamo le vodilna člena, ko limitiramo časovni interval ε proti nič in dobimo:

$$\psi(x,t) = \psi(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}} d\eta = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}}\psi(x,t)$$

Tako vidimo, da se naša konstanta glasi:

$$A = \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}}$$

Nato jo samo še vstavimo v zgornji izračun amplitude $K(b,a)$, upoštevamo še zvezo $N\varepsilon = t_b - t_a$ (tako, da se znebimo izraza $\frac{1}{\sqrt{n}}$) in dobimo končen rezultat Greenove funkcije za prost delec:

$$K(b,a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b-t_a)}} e^{\frac{im}{2\hbar}\frac{(x_b-x_a)^2}{(t_b-t_a)}}$$

Če bi funkcijo razvili še za red višje bi dobili Greenovo funkcijo v diferencialni obliki, oziroma bolj domače rečeno Schrodingerjevo enačbo. Na ta način je Feynman prišel do bolj logično osmisljive izpeljave Schrodingerjeve enačbe.