Anže Zupanc

Domaca naloga : Razvoj d(x) po casu.

funkcija ob casu t = 0 :

ψ(x) = δ(x)

Razvoj po casu zapišemo kot :

$$\psi(x) = \sum c_n y_n(x) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \,,$$

kjer je $E_n = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ in $\psi_n = e^{ikx}$.

Izracunajmo koeficiente c_n :

$$c_n = <\psi_n(x) \mid \psi(x)> = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} d(x) dx = 1$$

Funkcija ψ(x,t) je enaka

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} dk = \frac{1}{2p}\int e^{ikx} e^{-i\frac{\hbar t}{2m}k^2} dk \,.$$

Poglejmo si eksponent pod integralom in ga poskusimo zapisati v obliki popolnega kvadrata, saj poznamo vrednost naslednjega integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{p}{a}} \,.$$

Eksponent se glasi :

$$ikx - i\frac{\hbar t}{2m}k^2 = -i\left(\sqrt{\frac{\hbar t}{2m}}k - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar t}}x\right)^2 - \frac{m}{2\hbar t}x^2 \,.$$

In funkcija ψ(x,t) je enaka :

$$\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\sqrt{\frac{\hbar t}{2m}}k - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar t}}x\right)^2} e^{+i\frac{m}{2\hbar t}x^2} dk = \frac{1}{2p} e^{i\frac{m}{2\hbar t}x^2}\sqrt{\frac{2mp}{i\hbar t}} = \sqrt{\frac{m}{2pi\hbar t}} e^{i\frac{m}{2\hbar t}x^2} = \delta(x,t).$$

Izracunajmo še ρ(x,t) :

$$\rho(x,t) = \delta^*\delta = \frac{m}{2p\hbar t}$$

in j(x,t) :

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(y^*\nabla y - y\nabla y^*\right) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(y^*\nabla y\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(y^*\sqrt{\frac{m}{2pi\hbar t}}\, i\frac{m}{2\hbar t}2x e^{i\frac{m}{2\hbar t}x^2}\right) = r\frac{x}{t}$$

Vidimo, da je j = ρv, kjer je v = x/t.

Sedaj imamo orodje, s katerim lahko poljubno funkcijo razvijemo z δ(x).

$$\psi(x) = \int d(x - x')y(x')dx'$$

In še po casu :

$$\psi(x,t) = \int d(x - x', t)y(x')dx' \,.$$

To lahko storimo samo ce imamo **konstanten potencial** po vsem prostoru.