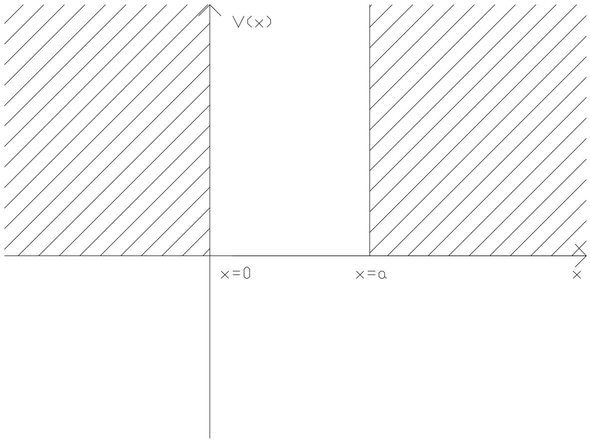
13.02.2002

1. Prva naloga

Delec v neskončni potencialni jami širine a.



Slika 1. Neskončna potencialna jama

Časovno neodvisna Schrödingerjeva enačba:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$
$$V(x) = V_0$$

Preoblikujemo:

$$\Psi''(x) + k^2\Psi(x) = 0$$
$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$$

Rešitev za $E > V_0$: $\Psi = A \cdot cos(kx) + B \cdot sin(kx)\,; \quad k = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$

Rešitev za $E < V_0$: $\Psi = A \cdot ch(kx) + B \cdot sh(kx)\,; \quad k = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$

Ali če zapišemo z eksponentnimi funkcijami:

$$E > V_0\ :\ \Psi = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}; \quad k = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$
$$E < V_0\ :\ \Psi = A \cdot e^{kx} + B \cdot e^{-kx}; \quad k = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

Robni pogoji:

$$1)\ \Psi(x=0)=0$$

$$2)\ \Psi(x=a)=0$$

Iz tega sledi: 1) $\longrightarrow A=0$; 2) $\longrightarrow ka=n\pi$
Torej se rešitev glasi: $\Psi = B \cdot sin(\frac{n\pi}{a}x)$
B določimo z normalizacijo (verjetnost, da se delec nahaja v potencialni jami je enaka ena):

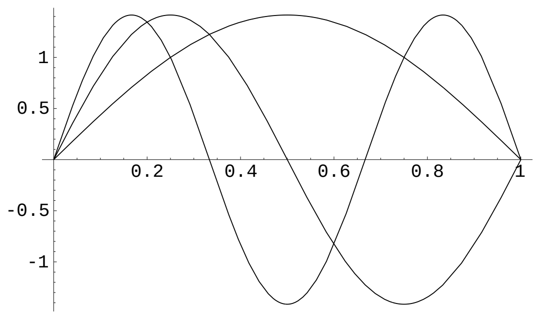
$$\int_0^a |\Psi(x)|^2 dx = 1 \Longrightarrow B^2\frac{a}{2} = 1 \Longrightarrow B = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Sedaj lahko končno zapišemo rešitev v celoti:$\Psi = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot sin(\frac{n\pi}{a}x)$
Poglejmo kakšne lastne energije ustrezajo našim valovnim funkcijam:

$$k = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} \Rightarrow E = \frac{\hbar^2k^2}{2m} + V_0$$

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma}; \quad n \in \aleph$$

Pri n=0 delec ne obstaja. Če jamo širimo (a narašča), energija pada.



Slika 2. Lastne funkcije za n=1,2,3; a=1

2. Druga naloga

Imamo potencialno jamo v obliki delta funkcije. Iščemo valovne funkcije in energije vezanih stanj. Če zapišemo potencial:

$$V(x) = -\widetilde{V_0}\delta(x)$$

Schrödingerjeva enačba:$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) - \widetilde{V_0}\Psi(x)\delta(x) = E\Psi(x)$
Zadevo integriramo od $-\epsilon$ do $+\epsilon$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'(x)\right]_{-\epsilon}^{\epsilon} - \widetilde{V_0}\Psi(0) = E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Psi(x)dx$$

Ker ϵ limitiramo proti nič, člen na desni strani enačaja odpade in tako dobimo enačbo:

$$[\Psi'(-0) - \Psi(+0)] = \frac{2\widetilde{V_0}\Psi(0)m}{\hbar^2}$$

Očitno v primeru, da ima potencial obliko delta funkcije, odvod funkcije $\Psi(x)$ ni več zvezen. To je tudi naš prvi robni pogoj. Rešitve Schrödingerjeve enačbe:

$$x < 0: \ \Psi_1(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

$$x > 0: \ \Psi_2(x) = Ce^{kx} + De^{-kx}$$

$$k = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$$

Ker mora biti Ψ normirana, se mora v neskončnosti približevati ničli in tako velja $B = 0$ ter $C = 0$.
Robni pogoji:

$$1) \ [\Psi_1'(-0) - \Psi_2(+0)] = \frac{2\widetilde{V_0}\Psi(0)m}{\hbar^2}$$

$$2) \ \Psi_1 0 = \Psi_2 0 \ \leftarrow \text{Valovni funkciji se morata stikati.}$$

Upoštevajoč robne pogoje dobimo:

$$2) \ \longrightarrow \ A = D$$

$$1) \ \longrightarrow \ Ak + Ak = \frac{2\widetilde{V_0}\psi(0)m}{\hbar^2}; \quad \Psi(0) = A$$

Torej lahko zapišemo: $k = \frac{\widetilde{V_0}m}{\hbar^2}$ In od tod energija:

$$E = -\frac{k^2\hbar^2}{2m} = -\frac{\widetilde{V_0}^2 m}{2\hbar^2}$$

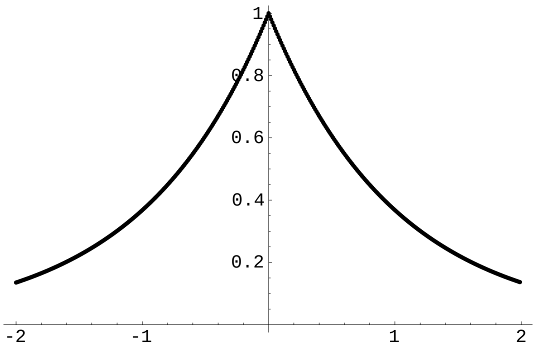
Tokrat imamo le eno možno stanje. Valovno funkcijo je potrebno še normirati, da določimo vrednost konstante A:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(x)|^2dx = 1 \Rightarrow 2\int_{0}^{\infty}A^2e^{-2kx}dx = 1$$

$$\frac{A^2}{k} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{k}$$

Tako je naša rešitev oblike:

$$x > 0: \quad \Psi(x) = \sqrt{k}\ e^{-kx}$$
$$x < 0: \quad \Psi(x) = \sqrt{k}\ e^{kx}$$



SLIKA 3. $\Psi(x)$