VEZANA STANJA V 1-D (I. del naloge)

(a) Pogoj za energijo delca za vezana stanja: $E < V_1$ in $E < V_2$.

$k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_1)} = \frac{i}{\hbar}\sqrt{2m(V_1-E)} = i K_1 \in C$

$k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_2)} = \frac{i}{\hbar}\sqrt{2m(V_2-E)} = i K_2 \in C$

$\psi_1 = A e^{ik1x} + B e^{-ik1x} = A e^{-K1x} + B e^{K1x} \Rightarrow A = 0$ (ker je $x \in (-\infty,0)$)

$\psi_1 = B e^{K1x}$

$\psi_2 = C e^{ik2x} + D e^{-ik2x} = C e^{-K2x} + D e^{K2x} \Rightarrow D = 0$ (ker je $x \in (0,-\infty)$)

$\psi_2 = C e^{-K2x}$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dobimo dve enačbi:
$B = M_{21} C$ (zaenkrat ne potrebujemo) in
$0 = M_{11} C$ in ker $C \neq 0 \Rightarrow M_{11} = 0$

Zaključek: Energije vezanih stanj so vedno določene z enačbo $\underline{\underline{M_{11} = 0}}$.

(b) Vemo, da se koeficient prepustnosti računa s enačbo:

$t = \frac{C}{A} = \frac{1}{M_{11}} \Rightarrow$ Energije vezanih stanj so hkrati poli za koeficient prepustnosti t.

(c) Pri eni od prejšnjih nalog smo za potencial v obliki $V(x) = V_0\,\delta(x)$ izpeljali prehodno matriko:

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \underline{\underline{\tilde{M}}}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \text{ kjer je } \underline{\underline{\tilde{M}}} = \begin{pmatrix} 1+\frac{k_0}{2ik} & \frac{k_0}{2ik} \\ -\frac{k_0}{2ik} & 1-\frac{k_0}{2ik} \end{pmatrix}.$$

Kjer je k_0 koeficient v enačbi za robni pogoj: $\psi'_2|_{x=0} - \psi'_1|_{x=0} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\,\psi_1|_{x=0}$; $\frac{2mV_0}{\hbar^2} = k_0$.

Ker imamo v naši nalogi prehodno matriko ravno obratno definirano, moramo poiskati njen inverz:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \underline{\underline{\tilde{M}}}^{-1}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \text{ kjer je } \underline{\underline{\tilde{M}}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{\tilde{M}}}^{-1}}\begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{k_0}{2ik} & -\frac{k_0}{2ik} \\ \frac{k_0}{2ik} & 1+\frac{k_0}{2ik} \end{pmatrix}$$

(kjer je $\det \underline{\underline{\tilde{M}}}^{-1} = 1$).

V našem primeru pa imamo malo drugačen potencial: $V(x) = -V_0\,\delta(x)$. Pravo prehodno matriko $\underline{\underline{M}}$ dobimo tako, da v $\underline{\underline{\tilde{M}}}^{-1}$ naredimo zamenjavi: $V_0 \rightarrow -V_0$ in $k_0 \rightarrow -k_0$.

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 1+\frac{k_0}{2ik} & \frac{k_0}{2ik} \\ -\frac{k_0}{2ik} & 1-\frac{k_0}{2ik} \end{pmatrix}$$

Zadaj lahko izračunamo energije vezanih stanj po enačbi $M_{11} = 0$:

$1 - \frac{k_0}{2ik} = 0$ in $k = iK$

$K = \frac{k_0}{2}$

$$\frac{2mV_0}{2\hbar^2} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{-2mE} = \frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}$$

$$\sqrt{2mE} = \frac{mV_0}{i\hbar} \Bigg|^2$$

$$\underline{\underline{E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2} < 0}}$$

Vidimo, da je energija vezanega stanja res negativna.

Potrebno je še izračunati valovno funkcijo (seveda je $k_1 = k_2 = k$):

$\psi_1 = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx} = B\,e^{-ikx} = B\,e^{Kx}$, za $x < 0$

$\psi_2 = C\,e^{ikx} + D\,e^{-ikx} = C\,e^{ikx} = C\,e^{-Kx}$, za $x > 0$

Pod točko (a) smo dobili enačbo, ki povezuje koeficienta B in C:

$B = M_{21}\,C = \frac{k_0}{2K}\,C$, vemo še $K = \frac{k_0}{2} \Rightarrow B = C$.

Koeficient B pa določimo z normalizacijo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{0}|\psi_1|^2 dx + \int_{0}^{\infty}|\psi_2|^2 dx = B^2\int_{-\infty}^{0}e^{2Kx}dx + B^2\int_{0}^{\infty}e^{-2Kx}dx = 2B^2\int_{0}^{\infty}e^{-2Kx}dx =$$

$$\frac{2B^2}{-2K}e^{-2Kx}\Bigg|_0^\infty = \frac{B^2}{K} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{B = \sqrt{K}}}$$

Torej sta naši funkciji:

$\psi_1 = \sqrt{K}\; e^{Kx}$, za $x < 0$ in

$\psi_2 = \sqrt{K}\; e^{-Kx}$, za $x > 0$.

(d) Imamo periodično valovno funkcijo $\psi(x+b) = \psi(x)$ in ker smo na obroču je $k_1 = k_2 = k$.

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$\psi_1 = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}$

$\psi_2 = C\,e^{ikx} + D\,e^{-ikx}$

Upoštevamo robna pogoja:
1) $\psi_1|_{x=0} = \psi_2|_{x=b}$ in
2) $\psi'_1|_{x=0} = \psi'_2|_{x=b}$; in ju uporabimo na:
$\psi_1 = (M_{11} C + M_{12} D) e^{ikx} + (M_{21} C + M_{22} D) e^{-ikx}$
$\psi_2 = C e^{ikx} + D e^{-ikx}$.
1) $\Rightarrow$ $M_{11} C + M_{12} D + M_{21} C + M_{22} D = C e^{ikb} + D e^{-ikb}$
$C (M_{11} + M_{21} - e^{ikb}) = D(-M_{12} - M_{22} + e^{-ikb})$ *
2) $\Rightarrow$ $ik (M_{11} C + M_{12} D) – ik (M_{21} C + M_{22} D) = ikC e^{ikb} - ikD e^{-ikb}$ /:ik
$M_{11} C + M_{12} D – M_{21} C - M_{22} D = C e^{ikb} - D e^{-ikb}$
$C (M_{11} – M_{21} - e^{ikb}) = D(-M_{12} + M_{22} – e^{-ikb})$ **
Delimo enačbi * in **:

$$\frac{M_{11} + M_{21} - e^{ikb}}{M_{11} - M_{21} - e^{ikb}} = \frac{- M_{12} - M_{22} + e^{-ikb}}{- M_{12} + M_{22} \quad e^{-ikb}}$$

Ko križno zmnožimo ulomka, dobimo dolgo enačbo, iz katere se pa večna členov odšteje med sabo. Na koncu dobimo enačbo, ki določa energije vezanih stanj za naš primer:

$$\underline{\underline{1 + \det M - (M_{11} e^{-ikb} + M_{22} e^{ikb}) = 0}},$$

kjer je $\det M = M_{11} M_{22} – M_{21} M_{12}$.

(e) Potrebno je rešiti primer (d) za potencial $V(x) = -V_0\ \delta(x)$. Prehodno matriko za ta potencial smo že izračunali v točki (c) in sedaj samo vstavljamo elemente matrike v enačbo:
$1 + \det M - (M_{11} e^{-ikb} + M_{22} e^{ikb}) = 0$.

$\det M = (1+\frac{k_0}{2ik})(1-\frac{k_0}{2ik})-\frac{k_0}{2ik}(-\frac{k_0}{2ik}) = 1 + \frac{k_0^2}{4k^2} - \frac{k_0^2}{4k^2} = 1$

Torej: $2 - (1 + \frac{k_0}{2ik}) e^{-ikb} – (1 - \frac{k_0}{2ik}) e^{ikb} = 0$.

$2 – (e^{-ikb} + e^{ikb}) - \frac{k_0}{2ik}(e^{-ikb} - e^{ikb}) = 0$

$2 – 2\cos(kb) + \frac{k_0}{2ik} 2i\sin(kb) = 0$ /:2

$1 - \cos(kb) + \frac{k_0}{2k}\sin(kb) = 0$ / damo na dvojne kote

$\sin^2\frac{kb}{2} + \cos^2\frac{kb}{2} - \cos 2\frac{kb}{2} + \frac{k_0}{2k}\sin 2\frac{kb}{2} = 0$ / upoštevamo enačbe za dvojne kote

$\sin^2\frac{kb}{2} + \cos^2\frac{kb}{2} + \sin^2\frac{kb}{2} - \cos^2\frac{kb}{2} + \frac{k_0}{2k} 2\sin\frac{kb}{2}\cos\frac{kb}{2} = 0$

$2\sin^2\frac{kb}{2} + \frac{k_0}{k}\sin\frac{kb}{2}\cos\frac{kb}{2} = 0$ /: $\cos^2\frac{kb}{2}$

$\mathrm{tg}^2\frac{kb}{2} + \frac{k_0}{2k}\mathrm{tg}\frac{kb}{2} = 0$; upoštevamo k=iK in tg(iz) = i th(z)

$-\mathrm{th}^2\frac{Kb}{2} + \frac{k_0}{2K}\mathrm{th}\frac{Kb}{2} = 0$

$\text{th}\dfrac{Kb}{2}\ [-\text{th}\dfrac{Kb}{2} + \dfrac{k_0}{2K}\ ] = 0$

Dobimo dve rešitvi:

1) $\text{th}\dfrac{Kb}{2} = 0$

$\dfrac{Kb}{2} = 0$

K = 0 $\Rightarrow$ E = 0

2) $\text{th}\dfrac{Kb}{2} = \dfrac{k_0}{2K}$

$\text{th}\dfrac{b\sqrt{2m\,|\,E\,|}}{2\hbar} = \dfrac{mV_0}{\hbar\sqrt{2m\,|\,E\,|}}$

Ta enačba ni analitično rešljiva, lahko pa pogledamo limite:

b $\rightarrow \infty \Rightarrow$ thcb $\rightarrow$ 1 in |E| $\rightarrow$ E_0 = konstanta oz. E $\rightarrow$ -E_0

b $\rightarrow$ 0 $\Rightarrow$ thcb $\rightarrow$ 0 in |E| $\rightarrow$ ∞ oz. E $\rightarrow$ -∞.