Izračun popotnega integrala za prost delec

Delo posvečam Mihael-Matjažu Zemljiču

Gregor Resman

Verjetnost, da pride delec v točko b[1], če je bil prej v a se izračuna:

$$P(b,a) = |K(b,a)|^2$$

Pri čemer je K amplituda, ki se izračuna:

$$K(b,a) = \sum_{popoteh} \phi(x(t))$$

Mi bomo časovni interval razdelili na podintervale, širine epsilon, tako da velja:

$$t_{i+1} - t_i = \varepsilon$$

$$N\varepsilon = t_b - t_a$$

Integral po poteh lahko sedaj razpišemo:

$$K(b,a) = \int\int ... \int \phi(x,t) dx_1 ... dx_{N-1}$$

in pridemo do definicije integrala po poteh:

$$K(b,a) = \int_a^b e^{ihS[b,a]} Dx$$

Pri izračunu nam bo v korist

pravilo:
Vemo, da se akcija izraža z integralom, zato lahko zapišemo:

$$S[b,a] = S[b,c] + S[c,a]$$

$$K(b,a) = \int e^{\frac{i}{\hbar}(S[b,c]+S[c,a])} Dx$$

Zadevo moramo integrirati :
1) po vseh poteh od a do c, kjer je S[b,c]=konst in jo lahko nesemo pred integral
2) po vseh poteh od c do b, kjer je S[a,c]=konst in
3) po vseh x_c
Tako je, če naredimo po opisanih točkah

$$K(b,a) = \int_{x_c} \int_c^b e^{\frac{i}{\hbar}S[b,c]} K(c,a) Dx dx_c = \int_{x_c} K(c,a) K(b,c)$$

Pravilo: Amplitude se med potjo množijo:

$$K(b,a) = \int_{x_c} K(c,a) K(b,c)$$

[1] ko govorimo o točki si moramo misliti interval v koordinati in točno vrednost časa, ali obratno

Po pravilu lahko zapišemo:

$$K(b,a)=\int_{x_1}\int_{x_2}...\int_{x_{N-1}}K(b,N-1)K(N-1,N-2)...K(1,a)dx_1...dx_{N-1}$$

Upoštevajmo $S[b,c]=\int_c^b Ldt$, $S[i+1,i]=L_i\varepsilon$ in $L=m\frac{\dot{x}^2}{2}$, saj govorimo o prostem delcu.

$$K(i+1,i)=\int e^{S[i+1,i]\frac{i}{h}}Dx=\frac{1}{A}e^{\frac{i\varepsilon}{h}L(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon},\frac{x_{i+1}+x_i}{2},\frac{t_{i+1}+t_i}{2})}$$

pri čemer je za sedaj integracijska konstanta

$$A=\sqrt{\frac{2\pi ih\varepsilon}{m}}$$

katere vrednost pustimo še nekaj časa v zraku. Tako je

$$K(b,a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_1}...\int_{x_{N-1}}(\frac{2\pi ih\varepsilon}{m})^{\frac{-N}{2}}e^{\frac{im\varepsilon}{h2}\sum_{i=1}^{N}(\frac{x_i-x_{i-1}}{\varepsilon})^2}dx_1...dx_{N-1}$$

$$I=(\frac{2\pi ih\varepsilon}{m})^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{m}{2ih\varepsilon}((x_2-x_1)^2+(x_1-x_0)^2)}dx_1=$$

$$=(\frac{2\pi ih\varepsilon}{m})^{-1}i\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2h\varepsilon}{m}}e^{\frac{m}{2ih\varepsilon 2}(x_2-x_0)^2}\int_{-\infty}^{\infty}u^{-it^2}dt$$

pri čemer sem naredil substitusijo:

$\sqrt{2}(x_1-\frac{x_2+x_0}{2})=u$ in $\sqrt{\frac{-m}{2h\varepsilon}}u=t$. Dobim:

$$I=\sqrt{\frac{m}{2h\varepsilon\pi 4}}e^{\frac{m}{2ih\varepsilon 2}(x_2-x_0)^2}(1-i)$$

Integral $\int_{-\infty}^{\infty}u^{-it^2}dt$
sem prebral iz priročnika. Upoštevam: $1-i=\sqrt{-2i}$ in dobim:

$$I=\frac{\sqrt{m(-1)}}{\sqrt{2h\pi 2\varepsilon}}e^{\frac{m}{2ih2\varepsilon}}=\sqrt{\frac{m}{2h\pi 2\varepsilon i}}e^{\frac{m}{2ih2\varepsilon}}$$

Dobljeni integral pomnožim z $\frac{1}{A}$ in ga znova integriram:

$$\int...\int I(\frac{2\pi h\varepsilon}{m})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{m}{2ih\varepsilon}(x_2-x_0)^2}dx...$$

To delam dokler ne poračunamo vseh integralov. Vidimo, da pri vskem naslenjem integriranju pride en ε tako v imenovalcu, kot v exponentu več. Dobimo:

$$K(b,a)=(\frac{2\pi ihn\varepsilon}{m})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{m}{2ihn\varepsilon}(x_n-x_0)^2}$$

$$K(b,a)=(\frac{2\pi ih(t_b-t_a)}{m})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{m}{2ih(t_b-t_a)}(x_b-x_a)^2}$$

Izračunamo verjetnostno gostoto:

$$P(b)dx=\frac{m}{2\pi h(t_b-t_a)}dx$$

in uvidimo, da je po prostoru konstantna. To je logično, saj smo imeli v točki a delec z natančno določeno lego. Po principu nedoločenosti ima tak delec z enako verjetnostjo zastopane vse gibalne količine in je lahko ob času b kjerkoli. Tako je njegova verjetnostna gostota konstantna.

$$K((x,t),(0,0)) = (\frac{2\pi iht}{m})^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{mx^2}{2iht}}$$

Glejmo amplitudo ob konstantnem času. Ako x povecam za λ, mora amplituda skočit za en nihaj:

$$2\pi = \frac{m(x+\lambda)^2}{2ht} - \frac{mx^2}{2ht} = \frac{mx\lambda}{ht} + \frac{m\lambda^2}{2ht}$$

kar da v klasičin limiti: $x \gg \lambda$:

$$\lambda = \frac{2\pi h}{m\frac{x}{t}} = \frac{2\pi h}{p} = \lambda$$

$$\lambda = \frac{2\pi h}{p}$$

Tako delcu z gibalno količino priredimo valovno dolžino.

Ako pa gledamo amplitudo pri kontantnem x, se dokopljemo do spozanja,

$$2\pi = \frac{mx^2}{2ht} - \frac{mx^2}{2h(t+T)} = \frac{mx^2}{2ht^2}(\frac{T}{1+\frac{T}{t}}) \approx \frac{mx^2}{2ht^2}T$$

zanemarim spreminjanje amplitude: $\frac{T}{t} \ll 1$

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{m}{2h}(\frac{x}{t})^2 = \frac{E}{h}$$

$$E = h\omega$$

da delcu z energijo lahko pripišemo frekvenco.

Def: totalna amplituda[2] $\psi(x,t)$ je amplituda, da se delec nahaja ob času t na $\{x-dx, x+dx\}$. Je kot amplituda, samo da nas ne zanima, od kje je delec prišel. Verjetnostno gostoto, da je delec v točki x izračunamo po istem kopitu:

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$$

Kot že ime totalna amplituda pove, je to vsota vseh amplitud:

$$\psi(x_2,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K((x_2,t_2),(x_1,t_1))\psi(x_1,t_1)dx_1$$

Pa poskušajmo preiti iz integralske enačbe na diferencialno:

$$\psi(x,t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{\frac{\varepsilon i}{h} L(\frac{x-y}{\varepsilon}, \frac{x+y}{2}, t)} \psi(y,t)dy$$

Epsilon je majhen, L je zato časovna konstanta:

$$S = \int Ldt = L\varepsilon$$

Glejmo za spremembo neprost delec:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x,t)$$

$$\psi(x,t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{\varepsilon \frac{i}{h}(\frac{m}{2}(\frac{x-y}{\varepsilon})^2 - V)} \psi(y,t)dy$$

[2]nekateri temu pravijo tudi valovna funkcija, toda zdi se mi, da je uporabljeno ime bolj zgovorno

$$y = x + \eta$$

$$\psi = (x, t + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{infty} \frac{1}{A} e^{\frac{im\eta^2}{2h\varepsilon}} e^{-\frac{i\varepsilon}{h} V[x + \frac{\eta}{2}, t]} \psi(x + \eta, t) d\eta$$

η je majhen, saj je sicer člen $\frac{x-y}{\varepsilon}$ velik, zadeva hitro oscilira, pri integraciji se izpovpreči. Razvijem po η

$$\psi(x,t) + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} d\eta e^{\frac{im\eta^2}{2h\varepsilon}} [1 - \frac{i\varepsilon}{h} V(x, T)][\psi(x,t) + \eta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}]$$

Če primerjam vodilna člena na obeh starneh, ko: $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \psi(x,t) e^{\frac{im\eta^2}{2h\varepsilon}} d\eta = \frac{1}{A} (\frac{2\pi i h \varepsilon}{m})^{\frac{1}{2}} \psi(x,t)$$

Ugotovim, kaj je primerna izbira za prej še neznano, toda uporabljeno konstanoto A:

$$A = (\frac{2\pi i h \varepsilon}{m})^{\frac{1}{2}}$$

S tem smo na vajah končali, z minimalno truda pa lahko posežem tudi v področje predavanj, če upoštevam nadaljne člene. Pri tem mi bosta v pomoč naslednja integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta^2} \eta d\eta = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{\frac{im\eta^2}{2h\varepsilon}} \eta^2 d\eta = \frac{ih\varepsilon}{m}$$

$$\psi(x,t) + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{\frac{i\eta^2 m}{2h\varepsilon}} [\psi(x,t) - \frac{i\varepsilon}{h} \psi V + \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{i\varepsilon}{h} V \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x}]$$

Ko izvedem integral mi mnogo členov odpade, ostane pa:

$$\psi(x,t) + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi - \frac{i\varepsilon}{h} V \psi - \frac{h\varepsilon}{2im} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

V čemer bi moral vsak (vsaj fizik) takoj spoznati:

$$-\frac{h}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

Sedaj pa nazaj k nalogi.

Kaj dobimo, če izvedemo časovni razvoj funkcije δ?

Naš delec je ob času a v točki[3] x_a:

$$\psi(x, t_a) = \delta(x - x_a)$$

$$\psi(x, t_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ikx} dk$$

Ta sprememba domene je kot sprememba reprezentacije iz q v p[4]. Tako nam A_k povedo zastopanost ustrezne gibalne količine.

[3] glej opombo s prve strani

[4] glej: Strnad, Fizika 3. del, str:159

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_a) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_a}$$

Ugotovitev: vse gibalne so enako zastopane, kar smo ugotovili že na 1. strani.
Začasno uvedem novo spremenljivko: $t = t_b - t_a$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx_a} e^{i(kx - \frac{E}{h}t)} dk =$$

$$E = \frac{h^2 k^2}{2m}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_a) - i\frac{h^2k^2}{2mh}t} dk$$

substitucija: $x - x_a = a$ in $\frac{h}{2m}t = b$.

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ib(k - \frac{a}{2b})^2 + ib\frac{a^2}{4b^2}} dk$$

zopet substitucija $\sqrt{b}(k - \frac{a}{2b}) = u$, tako je $\sqrt{b}dk = du$.

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu^2} du e^{i\frac{a^2}{4b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2\pi\sqrt{ht}} e^{i\frac{2m(x-x_a)^2}{2h(t_b-t_a)}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i h(t_b - t_a)}} e^{\frac{im(x_b-x_a)^2}{2h(t_b-t_a)}}$$

Če to primerjamo z rezultatom iz predhodnjega dela naloge, ugotovimo, da smo dobili $K(b,a)$, kar smo tudi pričakovali.