Elektron v magnetnem polju

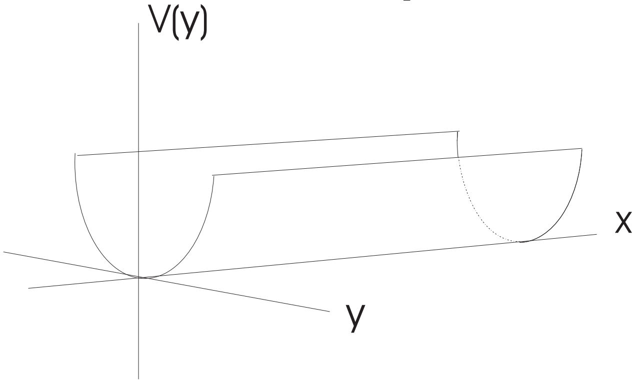
Katarina Roškar

5. junij 2001

Elektron se giblje v potencialu

$$V(x,y) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2.$$

Slika 1: Graf potenciala



Gibanje je omejeno na ravnino xy. Obravnavamo torej pravokotni prevodnik, ki je homogen v smeri x (končne [1] dolžine L) in ima transverzalni potencial $V(y)$.

1 Lastne energije in lastne funkcije elektrona

Schrödingerjeva enačba za delec v potencialu:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \Psi + V\Psi \tag{1}$$

Uporabimo nastavek: $\Psi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_x x} \chi_{k_x,n}(y)$. Tega vstavimo v enačbo 1, upoštevamo da je $\hat{\mathbf{p}} = (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, p_y)$ in dobimo:

$$\left\{ \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2 \right\} \chi_{k_x,n} = E_{k_x,n} \chi_{k_x,n} \tag{2}$$

Opazimo, da je ta enačba v smeri y enačba za harmonski oscilator in takoj lahko zapišemo *lastne energije*:

$$\begin{aligned} E_{k_x,n} &= \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} m\omega_c^2 y_{k_x}^2 + \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right); \\ y_{k_x} &= \frac{\hbar k_x}{|e| B_0}; \qquad \omega_c = \frac{|e| B_0}{m} \end{aligned} \tag{3}$$

[1] Dolžina v smeri x mora biti omejena, da lahko normiramo lastne funkcije.

in *lastne funkcije*:

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_x x} u_n(q); \tag{4}$$

$$q = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} y = \frac{y}{y_0}; \qquad y_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_0 m}}; \qquad u_n(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} H_n(q).$$ [2]

2 Sprememba lastnih energij in lastnih funkcij, če vklopimo homogeno magnetno polje $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$.

[3]

Schrödingerjeva enačba za delec v magnetnem polju:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 \Psi + V\Psi \tag{5}$$

Uporabimo Landauovo umeritev $\mathbf{A} = (-B_0 y, 0, 0)$:

$$\left\{ \frac{(p_x + eB_0 y)^2}{2m} + \frac{p_y}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2 \right\} \Psi = E_{k_x,n} \Psi. \tag{6}$$

Vstavimo podoben nastavek kot prej

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_x x} \chi_{k_x,n}(y - \tilde{y}).$$ [4]

Upoštevamo še, da je $\hat{\mathbf{p}} = (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, p_y)$ in dobimo:

$$\left\{ \frac{(\hbar k_x + eB_0 y)^2}{2m} + \frac{p_y}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2 \right\} \chi_{k_x,n} = E_{k_x,n} \chi_{k_x,n} \tag{7}$$

Ker velja $[p_x, y] = 0$ [5], lahko člene v {} zapišemo tako:

$$\frac{(\hbar k_x)^2}{2m} + \frac{\hbar k_x e B_0 y}{m} + \frac{(eB_0 y)^2}{2m} + \frac{p_y}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2.$$

Iz tretjega in zadnjega člena v novem {} izpostavimo y^2:

$$\frac{(\hbar k_x)^2}{2m} + \frac{\hbar k_x e B_0 y}{m} + \frac{p_y}{2m} + y^2 \left(\frac{(eB_0)^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \right).$$

Če vpeljemo:

$$\omega^2 = \omega_c^2 + \omega_0^2; \quad \omega_c = \frac{|e| B_0}{m},$$

lahko zapišemo {} krajše:

$$\frac{(\hbar k_x)^2}{2m} + \frac{\hbar k_x e B_0 y}{m} + \frac{p_y}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2.$$

Nato iz drugega in zadnjega člena izpostavimo $\frac{1}{2} m\omega^2$:

$$\frac{(\hbar k_x)^2}{2m} + \frac{p_y}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(y^2 - 2y \frac{\hbar k_x \omega_c}{\omega^2 m} \right),$$

[3] Uporabi Landauovo umeritev: $\mathbf{A} = (-B_0 y, 0, 0)$.

[4] $\tilde{y}$ je nek premik.

[5] p_x in y komutirata.

[6] dopolnimo do popolnega kvadrata:

$$\frac{(\hbar k_x)^2}{2m} + \frac{p_y}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(y - \frac{\hbar k_x \omega_c}{\omega^2 m}\right)^2 - \frac{m\omega^2\hbar^2 k_x^2\omega_c^2}{2\omega^4 m^2}.$$

Vstavimo še: $y_{k_x} = \frac{\hbar k_x}{|e|B_0} = \frac{\hbar k_x}{m\omega_c} \Rightarrow \hbar k_x = m\omega_c y_{k_x}$ in spremenimo vrstni red členov :

$$\frac{1}{2}m\omega_c^2 y_{k_x}^2 - \frac{1}{2}m\frac{\omega_c^4}{\omega^2}y_{k_x}^2 + \frac{p_y}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(y - y_{k_x}\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^2.$$

Iz prvih dveh členov izpostavimo $\frac{1}{2}m\omega_c^2 y_{k_x}$ in se vrnimo k celotni enačbi, ki je zdaj taka:

$$\left\{\frac{1}{2}m\omega_c^2 y_{k_x}^2\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) + \frac{p_y}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(y - y_{k_x}\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^2\right\}\chi_{k_x,n} \quad = \quad E_{k_x,n}\chi_{k_x,n}. \tag{8}$$

Nazadnje damo na skupni imenovalec faktor v prvem členu v {}:

$$\left\{\frac{1}{2}m\omega_c^2 y_{k_x}^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{p_y}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(y - y_{k_x}\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^2\right\}\chi_{k_x,n} \quad = \quad E_{k_x,n}\chi_{k_x,n}. \tag{9}$$

Zadnja dva člena sta zopet značilna za harmonski oscilator. *Lastne energije*:

$$E_{k_x,n} \quad = \quad \frac{1}{2}m\omega_c^2 y_{k_x}^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{10}$$

lastne funkcije:

$$\Psi(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ik_x x}u_n(q - q_{k_x}\frac{\omega_c^2}{\omega^2}); \tag{11}$$

$$q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}y = \frac{y}{y_0}; \qquad y_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}; \qquad u_n(q - q_{k_x}\frac{\omega_c^2}{\omega^2}) = e^{-\frac{(q-q_{k_x}\frac{\omega_c^2}{\omega^2})^2}{2}}H_n(q - q_{k_x}\frac{\omega_c^2}{\omega^2}); \qquad q_{k_x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}y_{k_x} = \frac{y_{k_x}}{y_0}$$

Zdaj lahko primerjamo *lastne energije* (rezultata 3 in 10):

$$E_{k_x,n} \quad = \quad \frac{1}{2}m\omega_c^2 y_{k_x}^2 + \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{12}$$

$$E_{k_x,n} \quad = \quad \frac{1}{2}m\omega_c^2 y_{k_x}^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{13}$$

ter *lastne funkcije* (rezultata 4 in 11):

$$\Psi(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ik_x x}e^{-\frac{q^2}{2}}H_n(q) \tag{14}$$

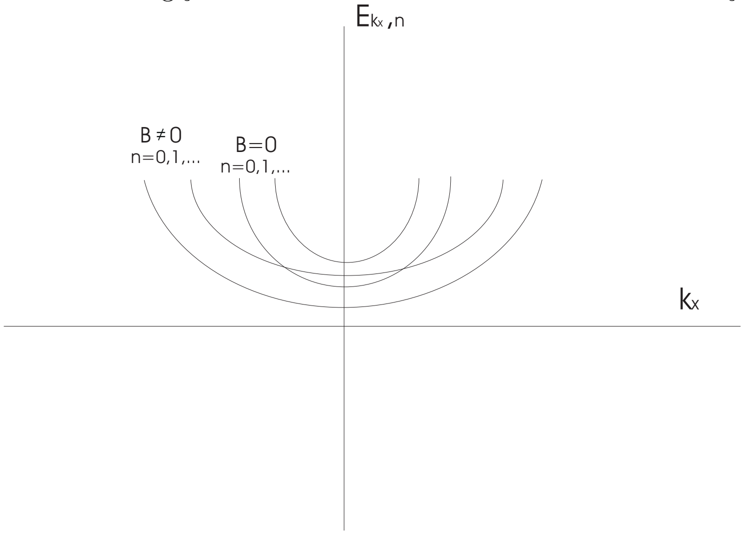
$$\Psi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ik_x x}e^{-\frac{(q-q_{k_x}\frac{\omega_c^2}{\omega^2})^2}{2}}H_n(q - q_{k_x}\frac{\omega_c^2}{\omega^2}) \tag{15}$$

Ko ni polja, niha harmonski oscilator s frekvenco ω_0, ko pa polje je, pa niha s frekvenco $\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2}$. Zato se tudi uvedeni y_0 ter posledično q, q_k za oba primera razlikujejo!! Torej pazi: v 14 in 15 ne gra za isti q ! Prvi vsebuje ω_0, drugi pa ω .

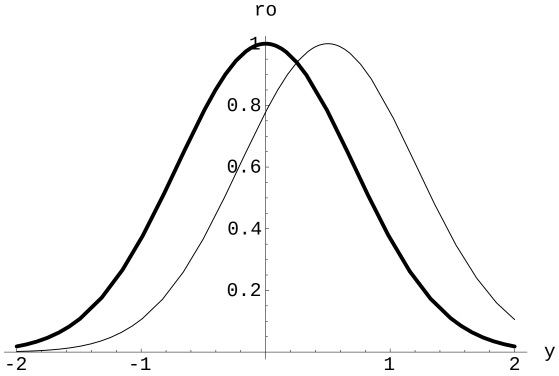
[6] Minus v (), ker smo *od tu naprej* upoštevali, da gre za elektron.

Lastne energije so v magnetnem polju premaknjene v smeri ordinate in razširjene, *lastne funkcije* pa so v magnetnem polju premaknjne v desno, prav tako niso enako visoke. [7]

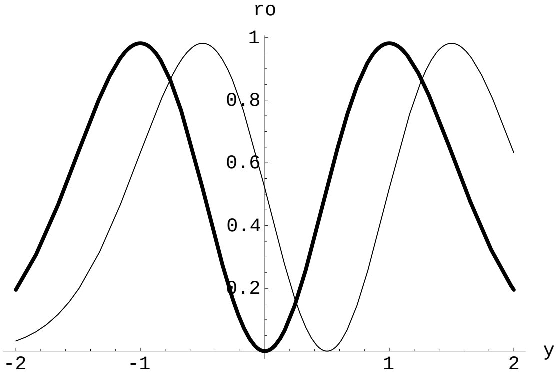
Lastne energije



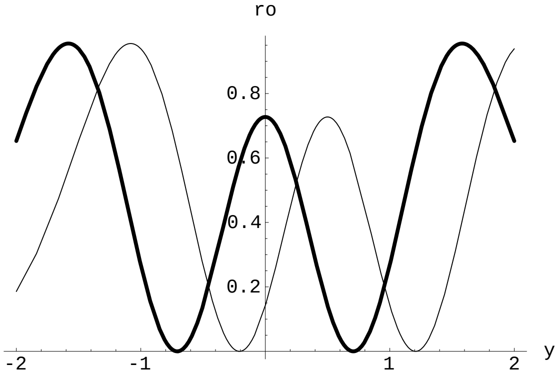
Verjetnostna gostota za n=0

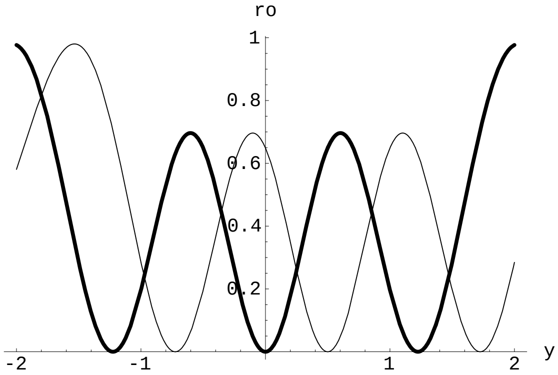


Verjetnostna gostota za n=1



Verjetnostna gostota za n=2





Verjetnostna gostota za n=3

[7] Pri risanju verjetnostnih gostot sem nakazala le premik!