VRTILNA KOLIČINA II

1. NALOGA :

Delec je v stanju z valovno funkcijo $\psi(\vec{r}) = A(x+y+2z)e^{-\alpha r}$ ***, kjer je*** $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ***.***

- ***Izračunaj pričakovano vrednost operatorjev L^2, L_x, L_y in L_z.***
- ***Kolikšna je verjetnost, da pri meritvi L_z izmerimo vrednost ħ?***

REŠITEV:

Najprej bomo valovno funkcijo izrazili s sfernimi harmoniki. Če v izrazu za valovno funkcijo uvedemo substitucijo za:

$x = r\cos\varphi\sin\vartheta$

$y = r\sin\varphi\sin\vartheta$

$z = r\cos\vartheta$,

lahko ugotovimo, da bomo rabili naslednje sferične harmonike:

$$Y_{00} = \frac{1}{4\pi}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{i\varphi}.$$

Rabili bomo tudi dobro poznani zvezi za $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$ in $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$.

Zdaj torej našo valovno funkcijo zapišemo takole:

$$\psi(\vec{r}) = Ar(\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta + 2\cos\vartheta)e^{-\alpha r}$$

$$\psi(\vec{r}) = Ar\left[-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,\frac{1}{2}\left(Y_{11}+Y_{11}^{*}\right) - \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,\frac{1}{2i}\left(Y_{11}-Y_{11}^{*}\right) + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}\right]e^{-\alpha r}$$

V naslednjem koraku upoštevamo zvezo:

$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}^{*}$, kar v našem primeru pomeni $Y_{1,-1} = (-1)^1 Y_{11}^{*} = -Y_{11}^{*}$. Od tod torej sledi:

$$\psi(\vec{r}) = -A\,r\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,\frac{1}{2}\left[(Y_{11}-Y_{1,-1}) - i\,(Y_{11}+Y_{1,-1}) - \sqrt{8}\,Y_{10}\right]e^{-\alpha r}$$

$$= -A\,r\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,\frac{1}{2}\left[(1-i)\,Y_{11} - (1+i)\,Y_{1,-1} - \sqrt{8}\,Y_{10}\right]e^{-\alpha r}$$

Nadaljnje račune nam bo olajšala prijetna lastnost sfernih harmonikov-njihova ortonormiranost:

$$\int_0^{\pi} d\vartheta\,\sin\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\; Y_{lm}(\vartheta,\varphi)^{*}\; Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Kot ponavadi tudi tokrat normiramo valovno funkcijo:

$$\int \psi(\vec{r})^{*}\psi(\vec{r})\, d\Omega = A^2\,\frac{8\pi}{3}\,\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-2\alpha r} r^4 dr \iint \left[(1-i)\,Y_{11} - (1+i)\,Y_{1,-1} - \sqrt{8}\,Y_{10}\right]^{*} \left[(1-i)\,Y_{11} - (1+i)\,Y_{1,-1} - \sqrt{8}\,Y_{10}\right] d\Omega$$

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha r} r^4 dr = \frac{3}{4\alpha^5}$$

$$\iint \left[(1-i)\,Y_{11} - (1+i)\,Y_{1,-1} - \sqrt{8}\,Y_{10}\right]^{*} \left[(1-i)\,Y_{11} - (1+i)\,Y_{1,-1} - \sqrt{8}\,Y_{10}\right] d\Omega = 12$$

Od tod sledi, da je $A^2 = \dfrac{\alpha^5}{6\pi}$.

- Za izračun pričakovane vrednosti L^2 se bomo poslužili naslednje zveze:

$$L^2 \left|\psi_{lm}\right\rangle = \hbar^2 L(L+1) \left|\psi_{lm}\right\rangle$$

Ker je naša valovna funkcija sestavljena iz krogelnih sferikov, ki imajo vsa L=1 in če upoštevamo, da smo valovno funkcijo tudi normirali, lahko takoj zapišemo rezultat, ki je $\left\langle \psi(\vec{r}) \right| L^2 \left| \psi(\vec{r}) \right\rangle = 2\,\hbar^2$.

- Za izračun pričakovane vrednosti L_z potrebujemo naslednjo zvezo:

$$L_z \left|\psi(\vec{r})\right\rangle = m_l \hbar \left|\psi(\vec{r})\right\rangle$$

$$\left\langle \psi(\vec{r}) \right| L_z \left| \psi(\vec{r}) \right\rangle =$$

$$= A^2\,\frac{8\pi}{3}\,\frac{1}{4}\int_0^\infty r^4\, e^{-2\alpha r} dr \iint \left[(1-i)\,Y_{11} - (1+i)\,Y_{1,-1} - \sqrt{8}\,Y_{10}\right]^{*} \hbar \left[1\cdot Y_{11}(1-i) - (-1)\cdot Y_{1,-1}(1+i) + 0\cdot Y_{10}\right] d\Omega$$

$$= 0$$

- Pričakovani vrednosti L_x in L_y bomo izračunali preko zveze:

$L_+ = L_x + iL_y \quad in \quad L_- = L_x - iL_y$,saj znamo zelo preprosto izračunati

$$L_- \left| l,m \right\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\left| l, m-1 \right\rangle$$

$$L_+ \left| l,m \right\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\left| l, m+1 \right\rangle$$

$$\left\langle \psi(\vec{r}) \right| L_- \left| \psi(\vec{r}) \right\rangle = C\hbar \left[(1+i)\left|11\right\rangle^{*} - (1-i)\left|1,-1\right\rangle^{*} - \sqrt{8}\left|10\right\rangle^{*}\right]\left[(1-i)\sqrt{2}\,\left|10\right\rangle - \sqrt{16}\left|1,-1\right\rangle\right] = 0$$

$$\left\langle \psi(\vec{r}) \right| L_+ \left| \psi(\vec{r}) \right\rangle = C\hbar \left[(1+i)\left|11\right\rangle^{*} - (1-i)\left|1,-1\right\rangle^{*} - \sqrt{8}\left|10\right\rangle^{*}\right]\left[-(1+i)\sqrt{2}\,\left|10\right\rangle - \sqrt{16}\left|1,1\right\rangle\right] = 0$$

Od tod sledi, da sta pričakovani vrednosti $\left\langle L_+ \right\rangle in \left\langle L_- \right\rangle$ =0.

- Pri tej nalogi nas zanima s kakšno verjetnostjo pri meritvi L_z izmerimo vrednost ħ. Iz enačbe $L_z \left|\psi(\vec{r})\right\rangle = m_l \hbar \left|\psi(\vec{r})\right\rangle$ sledi, da je m_l=1.

Našo valovno funkcijo $\psi(\vec{r})$ zapišemo kot produkt radialnega dela in funkcije, odvisne od φ, ϑ .

$$\psi(\vec{r}) = R(\vec{r})\, F(\varphi, \vartheta)$$

$$F(\varphi,\vartheta) = B\left[(1-i)\,Y_{11} - (1+i)\,Y_{1,-1} - \sqrt{8}\,Y_{10}\right]$$

$$R(\vec{r}) = C\,r\,e^{-\alpha r}$$

$$\int \left|R(\vec{r})\right|^2 dr = 1$$

$$\int \left|F(\varphi,\vartheta)\right|^2 = 1$$

Obe funkciji normiramo, od koder dobimo, da je $B^2 = \dfrac{1}{12}$.

Zapišemo funkcijo $\Phi(\varphi,\vartheta) = R(\vec{r})\,Y_{11}(\varphi,\vartheta)$, kjer je radialni del normirana funkcija.
Verjetnost, ki jo iščemo je:

$P = \left|\langle\Phi|\Psi\rangle\right|^2$, zato najprej izračunamo skalarni produkt:

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\left[(1+i)|11\rangle^* - (1-i)|1,-1\rangle^* - \sqrt{8}|10\rangle^*\right]|1,1\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{12}}$$

$$\left|\langle\Phi|\Psi\rangle\right|^2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

2. NALOGA :

Kako se razcepi 2. vzbujeno stanje 3D krogelno simetričnega harmonskega oscilatorja v homogenem magnetnem polju?

REŠITEV:

Za 1D harmonični oscilator poznamo lastne funkcije osnovnega, prvega in drugega vzbujenega stanja:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}}\exp-\frac{x^2}{2x_0^2},$$

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}}\exp-\frac{x^2}{2x_0^2}\cdot\sqrt{2}\,\frac{x}{x_0},$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}}\exp-\frac{x^2}{2x_0^2}\cdot\frac{2\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2 - 1}{\sqrt{2}},$$

kjer je $x_0 = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega_0}}$.

Vemo tudi, da so lastne energije 3D harmonskega oscilatoraja sledeče:

$$W_n = \hbar\omega_0\,(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}).$$

V nalogi iščemo razcep za 2. vzbujeno stanje, zato mora veljati $n_x+n_y+n_z=2$, od tod sledi 6 možnosti:

$$|200\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

$$|020\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2\left(\frac{y}{r_0}\right)^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

$$|002\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2\left(\frac{z}{r_0}\right)^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

$$|110\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2}{r_0^2}\, x\, y$$

$$|101\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2}{r_0^2}\, x\, z$$

$$|011\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2}{r_0^2}\, y\, z$$

V tem primeru je $r_0 = \sqrt{\frac{\eta}{m\omega_0}}$.

Vse funkcije imajo radialni del in del, ki ga bomo izrazili s sfernimi harmoniki:

$$|200\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2\left(\frac{r\cos\varphi\sin\vartheta}{r_0}\right)^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

$$|020\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2\left(\frac{r\sin\varphi\sin\vartheta}{r_0}\right)^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

$$|002\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2\left(\frac{r\cos\vartheta}{r_0}\right)^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

$$|110\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2}{r_0^2}\, r^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\vartheta$$

$$|101\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2}{r_0^2}\, r^2\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$|011\rangle = (\pi r_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)\frac{2}{r_0^2}\, r^2\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta$$

Funkcij ne bomo eksplicitno zapisali s sfernimi harmoniki, lahko pa vidimo, da bi za to potrebovali naslednjih 6:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3 \cdot \cos^2 \vartheta - 1), \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta \, e^{i\varphi}, \quad Y_{2,-1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta \, e^{-i\varphi}$$

$$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\vartheta \, e^{2i\varphi}, \quad Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\vartheta \, e^{-2i\varphi}.$$

Razcep v homogenem magnetnem polju je odvisen od obhodnega magnetnega kvantnega števila m_l, saj velja enačba $\Delta E = m_l \mu_B B$. Zato lahko narišemo razcep na sledeč način: