Domača naloga iz Kvantne mehanike I
VRTILNA KOLIČINA

Martin Zadnik

16. april 2001

1 Za operator $x_+ = x + iy$ pokaži $[L_z, x_+] = \hbar\, x_+$ in $[L^2, x_+] = 2\,\hbar\, x_+ L_z + 2\,\hbar^2\, x_+ - 2\,\hbar\, z L_+$.

Izračunajmo najprej komutator med koordinato in komponento vrtilne količine:

$$[x_i, L_j] = [x_i, (\vec{r} \times \vec{p})_j] = [x_i, \epsilon_{jkl}\, x_k\, p_l] = \epsilon_{jkl}([x_i, x_k] p_l + x_k [x_i, p_l]) =$$

$$= \epsilon_{jkl}\, x_k\, i\,\hbar\, \delta_{il} = \epsilon_{jki}\, x_k\, i\,\hbar.$$

Potem je

$$[L_z, x_+] = [L_z, x] + i[L_z, y] = -\epsilon_{13k}\, x_k\, i\,\hbar - i\,\epsilon_{23k}\, x_k\, i\,\hbar = y\, i\,\hbar + x\,\hbar = \hbar\, x_+.$$

Preden pokažemo še drugo zvezo, izrazimo operator L^2 nekoliko drugače:

$$L_\pm = L_x \pm i L_y \qquad \Rightarrow \qquad L_x = \tfrac{1}{2}(L_+ + L_-), \quad L_y = \tfrac{1}{2i}(L_+ - L_-)$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \tfrac{1}{4}(L_+^2 + L_-^2 + L_+ L_- + L_- L_+ - L_+^2 - L_-^2 + L_+ L_- +$$

$$+ L_- L_+) + L_z^2 = \tfrac{1}{2}(L_+ L_- + L_- L_+) + L_z^2 = \tfrac{1}{2}(2\,\hbar\, L_z + 2 L_- L_+) + L_z^2,$$

kjer smo uporabili zvezi $L_+ L_- = [L_+, L_-] + L_- L_+$ in $[L_+, L_-] = 2\,\hbar\, L_z$. Imamo torej

$$L^2 = \hbar\, L_z + L_- L_+ + L_z^2.$$

Zdaj lahko izračunamo

$$[L^2, x_+] = \hbar [L_z, x_+] + L_- [L_+, x_+] + [L_-, x_+] L_+ + L_z [L_z, x_+] + [L_z, x_+] L_z =$$

$$= \hbar^2\, x_+ - 2\,\hbar\, z\, L_+ + \hbar\, L_z x_+ + \hbar\, x_+ L_z = \hbar^2\, x_+ - 2\,\hbar\, z L_+ + \hbar\, [L_z, x_+] + \hbar\, x_+ L_z +$$

$$+\hbar x_+ L_z = 2\hbar^2 x_+ - 2\hbar z L_+ + 2\hbar x_+ L_z,$$

kjer smo uporabili zvezi

$$[L_\pm, x_+] = [L_x, x_+] \pm i[L_y, x_+] = ([L_x, x] + i[L_x, y]) \pm i([L_y, x] + i[L_y, y]) =$$

$$= -\hbar z\,(1 \mp 1) = \begin{cases} 0 & ;\, L_+ \\ -2\hbar z & ;\, L_- \end{cases},$$

saj je $[L_i, x_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,x_k$.

2 Pokaži, da je valovna funkcija $x_+ \mid ll\rangle$ spet lastno stanje operatorjev L_z in L^2.

Najprej za L_z:

$$L_z\, x_+ \mid ll\rangle = ([L_z, x_+] + x_+ L_z) \mid ll\rangle = (\hbar x_+ + x_+ L_z) \mid ll\rangle =$$

$$= x_+(\hbar + l\,\hbar) \mid ll\rangle = \hbar\,(l+1)\,x_+ \mid ll\rangle$$

Vidimo, da je lastna vrednost enaka $\hbar\,(l+1)$. Uporabili smo še $L_z Y_{lm} = = m\,\hbar\,Y_{lm}$. Zdaj pa še za L^2:

$$L^2\, x_+ \mid ll\rangle = ([L^2, x_+] + x_+ L^2) \mid ll\rangle =$$

$$= (2\hbar x_+ L_z + 2\hbar^2 x_+ - 2\hbar z L_+ + x_+ L^2) \mid ll\rangle = x_+(2\hbar L_z + 2\hbar^2 + L^2) \mid ll\rangle =$$

$$= x_+(2\hbar^2 l + 2\hbar^2 + \hbar^2 l\,(l+1)) \mid ll\rangle = (\hbar^2\,(l+1)(l+2))\,x_+ \mid ll\rangle,$$

kjer smo upoštevali dvoje: $L^2 Y_{lm} = \hbar^2\, l\,(l+1)\,Y_{lm}$ in $-2\hbar z L_+ \mid ll\rangle = 0$, ker bi moral L_+ povečati m za 1, to pa ne gre, ker je m že maksimalen možen, namreč l. Lastna vrednost za L^2 pri stanju $x_+ \mid ll\rangle$ je torej $\hbar^2\,(l+1)(l+2)$.

3 Poišči izraz za $Y_{ll}(\theta, \varphi)$.

Ugotovili smo, da če z operatorjema L_z in L^2 delujemo na $x_+ \mid ll\rangle$ namesto na $\mid ll\rangle$, dobimo lastni vrednosti, kjer namesto l stoji $l+1$. Torej je $\mid ll\rangle = = A\,x_+^l \mid 00\rangle$, saj bomo tako namesto lastnih vredosti za $\mid 00\rangle$ dobili take, kjer je l namesto 0 enak l. Vemo, da je $\mid 00\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, saj ta funkcija ne sme biti odvisna niti od θ niti od φ, kakšna konstanta pa mora torej biti, pa ugotovimo iz pogoja za normiranost. Izračunajmo zdaj $\mid ll\rangle$:

$x_+ = x + i\,y = r\sin\theta\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\sin\theta\,e^{i\,\varphi},$

$\mid ll\rangle = A\,x_+^l \mid 00\rangle = A\,r^l\sin^l\theta\;e^{i\,l\,\varphi}\frac{1}{\sqrt{4\pi}},$

$1 = \mid A\mid^2 \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} r^{2l}\sin^{2l}\theta\,\frac{1}{4\pi}\,d(\cos\theta)\,d\varphi = \frac{|A|^2}{2}\,r^{2l}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^l\,du = \frac{|A|^2}{2}\,r^{2l}\,\frac{2^{l+1}l!}{(2l+1)!!},$

kar dobimo z večkratnim integriranjem per partes. Torej je

$A = \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{2^l\,l!}}\,r^{-l},$

$\mid ll\rangle = \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{4\pi\,2^l\,l!}}\,\sin^l\theta\;e^{i\,l\,\varphi}\,(-1)^l.$

Faktor $(-1)^l$ smo dodali naknadno.

4 S pomočjo operatorja L_- v θ, φ reprezentaciji izračunaj $Y_{21}(\theta, \varphi)$.

Iz funkcije $\mid ll\rangle$ izračunamo funkcijo $\mid lm\rangle$ s pomočjo zveze

$L_- \mid lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \mid l, m-1\rangle,$

s katero po korakih znižamo drugi indeks z l na m. Najprej zapišimo operator L_- v θ, φ reprezentaciji:

$L = \vec{r}\times\vec{p} = -i\,\hbar\,\vec{r}\times\nabla, \qquad \nabla = \frac{\partial}{\partial r}\,\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\,\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\hat{e}_\varphi, \qquad \vec{r} = r\,\hat{e}_r,$

$\Rightarrow \qquad L_r = 0, \quad L_\theta = i\,\hbar\,\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad L_\varphi = -i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\theta},$

$L_x = \sin\theta\;\cos\varphi\;L_r + \cos\theta\;\cos\varphi\;L_\theta - \sin\varphi\;L_\varphi,$

$L_y = \sin\theta\;\sin\varphi\;L_r + \cos\theta\;\sin\varphi\;L_\theta + \cos\varphi\;L_\varphi,$

$L_- = L_x - i\,L_y = \hbar(i\,ctg\,\theta\;e^{-i\,\varphi}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - e^{-i\,\varphi}\,\frac{\partial}{\partial\theta})$

Iz $Y_{22}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\sin^2\theta\;e^{2\,i\,\varphi}$ potem dobimo

$Y_{21}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\,\hbar}\,L_- Y_{22} = \frac{1}{2}(i\,ctg\,\theta\;e^{-i\,\varphi}\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\sin^2\theta\;e^{2\,i\,\varphi}\,2\,i -$

$-\,e^{-i\,\varphi}\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,e^{2\,i\,\varphi}\,2\sin\theta\;\cos\theta) = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,e^{i\,\varphi}\,\sin 2\theta.$

Minus je narobe. Kdor ugotovi, zakaj, dobi nagrado - zaboj s čokolado.

5 Valovna funkcija ψ ima dobro določeno velikost in z-komponento vrtilne količine. Izračunaj produkt nedoločenosti x- in y-komponente vrtilne količine in primerjaj izraz z minimalno vrednostjo, ki sledi iz Heisenbergovega principa nedoločenosti.

Če poznamo vrednost velikosti vrtilne količine L in njeno z-komponento L_z, vemo, da leži vektor vrtilne količine na plašču stožca, ki ima vrh v izhodišču, tvorilko dolgo L in višino dolgo L_z. Vsota kvadratov nedoločenosti x- in y-komponente je potem enaka kvadratu radija osnovne ploskve stožca, to je $L^2 - L_z^2$. Ta kvadrat radija pa je tudi enak vsoti kvadratov nedoločenosti x- in y-komponente vrtilne količine, torej:

$$(\delta L_x)^2 + (\delta L_y)^2 = L^2 - L_z^2 = \hbar^2 \,(l(l+1) - m^2).$$

Ker pa sta nedoločenosti obeh komponent enaki, je

$$(\delta L_x)^2 = (\delta L_y)^2 = \tfrac{1}{2}\,\hbar^2 \,(l(l+1) - m^2)$$

in

$$\delta L_x = \delta L_y = \tfrac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{l(l+1) - m^2}.$$

Za $l = 0$ je potem $\delta L_x \, \delta L_y = 0$, v vseh drugih primerih pa velja:

$$\delta L_x \, \delta L_y = \tfrac{1}{2}\,\hbar^2 \,(l(l+1) - m^2) \geq \tfrac{1}{2}\,\hbar^2\, l \geq \tfrac{1}{2}\,\hbar^2\, m,$$

saj je $m \leq l$. Tako primer z $l = 0$ kot tisti z $l \neq 0$ se ujemajo s Heisenbergovim principom nedoločenosti, ki pove:

$$\delta L_x \, \delta L_y \geq \tfrac{1}{2} \mid \langle [L_x, L_y \rangle \mid = \tfrac{1}{2} \mid \langle i\, \hbar\, L_z \rangle \mid = \tfrac{1}{2}\,\hbar^2\, m.$$