Harmonični oscilator v homogenem električnem polju

Matjaž Breskvar (phoenix@fiz.uni-lj.si)

7. junij 2001

Naša naloga je ugotoviti kako se obnaša harmonični oscilator (v osnovnem stanju), ko ga postavimo v homogeno električno polje. V ta namen razvijemo osnovno stanje harmoničnega oscilatorja po lastnih stanjih harmoničnega oscilatorja v električnem polju. Od tu naprej pa je pot enaka kot pri vseh problemih, kjer imamo stanje sistema izraženo s superpozicijo lastnih stanj.

Začnemo z običajnim harmonskim oscilatorjem

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

Ob času $t = 0$ vključimo električno polje E in dobimo harmonični oscilator v električnem polju, ki ga prevedemo v obliko podobno :

$$\begin{aligned}
E &= -\nabla\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \int E dx = -Ex, \\
V &= e\phi = e_0 E x, \\
H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 + e_0 E x \\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x + \frac{e_0 E}{m\omega^2})^2 - \frac{e_0^2 E^2}{2m\omega^2} \\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x + x_0)^2 - W_0 \\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\widetilde{x}^2 - W_0,
\end{aligned}$$

V računu smo označili $x_0 = \frac{e_0 E}{m\omega^2}$, $W_0 = \frac{e_0^2 E^2}{2m\omega^2}$ in $\widetilde{x} = x + x_0$. S tem smo prevedli problem harmoničnega oscilatorja v električnem polju v problem običajnega harmoničnega oscilatorja. V tem trenutko lahko enostavno zapišemo anhilacijski in kreacijski operator za harmonični oscilator v električnem polju.

$$H = \hbar\omega(\widetilde{a}^\dagger \widetilde{a} + \frac{1}{2}),$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\widetilde{x}}{x_c}+x_c\frac{\partial}{\partial x}) = a+\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}x_0 = a+\alpha, \\
\widetilde{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\widetilde{x}}{x_c}-x_c\frac{\partial}{\partial x}) = a^\dagger+\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_0 = a^\dagger+\alpha,
\end{aligned}
$$

Sedaj želimo pokazati, da je valovna funkcija pred vključitvijo električnega polja lastna funkcija novega anihilacijska operatorja. Uporabimo splošno lastnost anihilacijskega operatorja $a\left|0\right\rangle = 0$ in dobimo:

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{a}-\alpha)\left|0\right\rangle &= 0, \\
\widetilde{a}\left|0\right\rangle &= \alpha\left|0\right\rangle,
\end{aligned}
$$

Prvotno valovno funkcijo razvijemo po novi bazi, da bi lahko ugotovili, kako se sistem razvija v času po vklopu električnega polja:

$$
\begin{aligned}
\left|0\right\rangle &= \sum_n c_n\left|\widetilde{n}\right\rangle \\
\left\langle\widetilde{n}\mid 0\right\rangle &\equiv \left\langle\widetilde{\psi_n}\mid\psi_0\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left\langle\widetilde{a}^{\dagger n}\widetilde{\psi_0}\mid\psi_0\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left\langle\widetilde{\psi_0}\mid a^n\psi_0\right\rangle \\
&= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left\langle\widetilde{\psi_0}\mid\psi_0\right\rangle \\
\left|0\right\rangle &= C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left|\widetilde{n}\right\rangle = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!}\left|\widetilde{0}\right\rangle \\
&= e^{\alpha a^\dagger}\left|\widetilde{0}\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Poiščemo še normalizacijsko konstanto C

$$
\begin{aligned}
1 &= \left\langle 0\mid 0\right\rangle = C^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = C^2 e^{|\alpha|^2}, \\
C &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

S tem smo razvili osnovno lastno funkcijo originalnega harmočnega po lastnih funkcijah harmoničnega oscilatorja v električnem polju tako lahko enostavno zapišemo časovni razvoj

$$
\begin{aligned}
\left|0,t\right\rangle &= C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\left|\widetilde{n}\right\rangle e^{-\frac{i\omega t}{2}} \\
&= e^{-i\frac{\omega t}{2}}e^{-\frac{|\alpha(t)|^2}{2}}e^{\alpha(t)a^\dagger}\left|\widetilde{0}\right\rangle,
\end{aligned}
$$

kjer je $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$. Na koncu izračunamo še časovno povprečje koordinate in energije

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \langle 0,t \mid \widetilde{x} \mid 0,t\rangle \\
&= \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle 0,t \mid (\widetilde{a} + \widetilde{a}^\dagger) \mid 0,t\rangle \\
&= \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle \alpha(t) \mid \alpha^*(t)\rangle \\
&= x_0 \cos(\omega t), \\
\langle W\rangle &= \langle 0,t \mid H \mid 0,t\rangle \\
&= \hbar\omega \left\langle 0,t \mid (\widetilde{a}^\dagger\widetilde{a} + \frac{1}{2}) \mid 0,t \right\rangle \\
&= \hbar\omega \left\langle 0,t \mid (\widetilde{a}^\dagger\widetilde{a}) \mid 0,t\right\rangle + \hbar\omega \left\langle 0,t \mid (\frac{1}{2}) \mid 0,t \right\rangle \\
&= \hbar\omega \left\langle \widetilde{a}\,|0,t\rangle) \mid \widetilde{a}\,|0,t\rangle\right\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega \\
&= \hbar\omega \left|\alpha^2\right| \\
&= \hbar\omega_0 (\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_0)^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega \\
&= \frac{1}{2}\omega^2 m x^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega.
\end{aligned}
$$